

ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG
DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON
H. GEIGER

107. BAND. 3. UND 4. HEFT

MIT 52 TEXTFIGUREN

(ABGESCHLOSSEN AM 30. SEPTEMBER 1937)



VERLAG VON JULIUS SPRINGER, BERLIN

1937

Die

Zeitschrift für Physik

erscheint zwanglos in einzelnen Heften; 12 Hefte bilden einen Band.

Die Zeitschrift für Physik ist durch jede Buchhandlung zu beziehen. Die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft erhalten die Zeitschrift für Physik zu einem mit dem Vorstände der Gesellschaft vereinbarten Vorzugspreis geliefert.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Auch verpflichtet sich der Autor, die Arbeit nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen.

Manuskriptsendungen sind an die **Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24**, zu richten.

Die Autoren erhalten eine Fahnenkorrektur. Eine 2. (Umbruch-) Korrektur wird nur auf ausdrücklichen Wunsch übersandt, weil dadurch in der Regel das Erscheinen der Arbeit erheblich verzögert wird.

Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10 % der Satz-kosten übersteigen, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich. Weitere 125 Exemplare werden, falls bei Rücksendung der 1. Korrektur bestellt, gegen eine angemessene Entschädigung geliefert. Darüber hinaus gewünschte Exemplare müssen zum Bogennettopreis berechnet werden. Mit der Lieferung von Dissertationsexemplaren befaßt sich die Verlagsbuchhandlung grundsätzlich nicht; sie stellt jedoch den Doktoranden den Satz zur Anfertigung der Dissertationsexemplare durch die Druckerei zur Verfügung.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer, Berlin W 9, Linkstraße 22/24.

Aufnahmebedingungen.

Nur solche Arbeiten können in die Zeitschrift für Physik aufgenommen werden, die den folgenden

Richtlinien

genügen:

1. Die Arbeit muß dem Gebiete der experimentellen oder theoretischen Physik angehören. Auch Arbeiten aus Nachbargebieten können aufgenommen werden. Ausgeschlossen sind jedoch Arbeiten mit rein mathematischem, astronomischem, mineralogischem oder chemischem Inhalt.
2. Die Einleitung der Arbeit soll den Leser in knappen Sätzen in die Vorgeschichte des Problems einführen. Je stärker ein Problem im Vordergrund des Interesses steht, desto kürzer kann die Einleitung gehalten werden.
3. Das Ziel der Arbeit muß schon in der Einleitung klar ausgesprochen werden. Es soll dabei auch ersichtlich sein, inwieweit die Erreichung des gesteckten Zieles einen im Rahmen der heutigen Physik wertvollen wissenschaftlichen Fortschritt bedeutet.
4. Die Beschreibung von Versuchsapparaten soll sich keinesfalls in technische Einzelheiten verlieren. Nur apparative Neuheiten von grundsätzlicher Bedeutung sind von Interesse. Die bildliche Wiedergabe von Apparaten soll durch schematische Zeichnung, nicht durch Photographie erfolgen.
5. Es ist fast immer ausreichend, von den Meßreihen ein typisches Beispiel herauszugreifen. An diesem Beispiel soll aber ersichtlich bzw. kontrollierbar sein, wie die Auswertung erfolgt ist, wie die Rechnungen durchgeführt wurden, welche Korrekturen angebracht sind usw.
6. Die Meßergebnisse sind *entweder* in Tabellen *oder* in Kurven wiederzugeben. Nur in Ausnahmefällen kann es gerechtfertigt sein, dasselbe Zahlenmaterial sowohl in Tabellen wie in Kurvenform zu veröffentlichen.
7. Die Lesbarkeit einer Arbeit gewinnt sehr, wenn die Figuren und Tabellen durch gut durchdachte Beschriftung an sich schon verständlich sind. Jedenfalls sollen alle Figuren und Tabellen mit Unterschriften bzw. Überschriften versehen sein.
8. In theoretischen Arbeiten sollen die mathematischen Ausführungen gerade so ausführlich veröffentlicht werden, daß der Leser die vom Verfasser überwundenen Schwierigkeiten nicht nochmals von neuem überwinden muß. Elementare Rechnungen dürfen nur ganz kurz angedeutet werden. In Zweifelsfällen empfiehlt es sich, Zwischenrechnungen als Anhang in kleinem Druck zu bringen.
9. Die Diskussion der Ergebnisse und die sonstigen allgemeinen Erörterungen sollen in ihrer Ausführlichkeit dem Umfang der in der Arbeit gewonnenen neuen Erkenntnisse entsprechen. Eine kurze Meßreihe berechtigt noch nicht dazu, einen großen Fragenkomplex lehrbuchartig aufzurollen.
10. Jede Arbeit muß in sich abgeschlossen sein. Arbeiten, welche allein auf einen Versuchsvorschlag oder nur auf eine Verbesserung von Meßverfahren oder Meßinstrumenten abzielen, können in der Regel nicht aufgenommen werden.
11. Dissertationen oder Habilitationsschriften können nicht in voller Breite aufgenommen werden. Nur solche Auszüge werden veröffentlicht, die den vorliegenden Richtlinien entsprechen. Die Auszüge sind in einer Fußnote als gekürzte Dissertation usw. zu kennzeichnen.
12. Am Kopf jeder Arbeit soll eine Inhaltsangabe in Kleindruck stehen. In diese Inhaltsangabe sollen vor allem die Punkte aufgenommen werden, welche der Verfasser als seine neuen Ergebnisse und damit als den durch seine Arbeit erzielten wissenschaftlichen Fortschritt ansieht.

Der Herausgeber: H. Geiger.

Über Zählrohre für das sichtbare Spektralgebiet.

Von K. O. Kiepenheuer in Göttingen.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1937.)

Versuche mit Lichtzählrohren üblicher Bauart zeigen, daß bei Anwendung von Alkalikathoden Eigenerrögen eintritt, die jedes Zählen unmöglich macht. Als Grund wird das Ionenbombardement der Kathode vermutet. Um dieses zu unterbinden, wird die Photokathode vom eigentlichen Entladungsraum durch eine elektronendurchlässige Folie abgetrennt. Die Photokathode befindet sich dann im Vakuum und die Photoelektronen werden derart beschleunigt, daß sie die Folie passieren und jenseits derselben eine Entladung zünden. — Eine Methode zur Herstellung von geeigneten Glasfolien wird beschrieben.

Die empfindlichste und wohl auch unbequemste Methode, sichtbares Licht nachzuweisen oder zu photometrieren, ist die Anwendung photochemischer Prozesse, besonders dann, wenn man auf Bildwirkung verzichtet und etwa nur die insgesamt von einer Lichtquelle erzeugten Silberkörner zählt. Man kommt so z. B. ¹⁾ im Blauen auf Ausbeuten von 0,01 bis 0,02 $\frac{\text{Silberkörner}}{\text{Auffallendes Lichtquant}}$. Die nutzbaren Ausbeuten sind ein wenig kleiner, da die stets vorhandenen Schleierkörner mit in die Zählung eingehen.

Sehr viel ungünstiger arbeitet die Photozelle. Die Belichtungszeit ist durch die Isolation der Zelle bedingt, die bei zunehmender Rotempfindlichkeit zwangsläufig abnimmt. Die Helligkeitsmessung wird durch eine Strommessung ersetzt. Um in das Helligkeitsgebiet des photographischen Schwellenwertes vorzudringen (Belichtungszeit ≈ 1 Stunde), bedarf es der Messung eines Stromes von etwa 0,1 Elektronen/sec $\approx 10^{-20}$ Amp., der weder mit Elektrometer noch mit Verstärkeranordnungen mit Sicherheit nachzuweisen ist.

Das Lichtzählrohr hat gegenüber der Photozelle den Vorteil, daß es praktisch unabhängig vom Isolationswiderstand ist, daß es beliebig lange Belichtungszeiten zuläßt und daß es gestattet, jedes Photoelektron mit einfachen Mitteln einwandfrei, d. h. ohne Schwankungserscheinungen einzeln zu registrieren.

¹⁾ Vgl. J. Eggert, W. Rahts, Handb. d. Phys. **19**, 594, 1927.

Leider hat das Zählrohr bei der Photometrie sichtbaren Lichtes bisher versagt¹⁾ bzw. den Anwendungsbereich der Photozelle nicht überschritten²⁾. Dampft man nämlich — in naheliegender Weise — auf den Zylinder eines Ultraviolettzählrohres üblicher Bauart eine Alkalisicht (z. B. K), füllt das Rohr mit einigen Zentimetern Wasserstoff, entgast alle Glas- und Metallteile und hält auch alle kondensierbaren Dämpfe vom Rohr fern, so beobachtet man keine Zählleistungen³⁾, vielmehr treten bei Überschreiten der Zündspannung um weniger als 1 Volt einige sehr schwache Entladungen auf, die nach kurzer Zeit — auch ohne Belichtung — in eine Dauerentladung bzw. in eine unauflösbare Zahl von Einzelentladungen übergehen.

Dieser „eigenerregte“ Zustand bleibt über Stunden, in einigen Fällen über Tage erhalten. Die Verwendung anderer Füllgase, insbesondere von Edelgasen, bringt keine Besserung.

Mit abnehmender Austrittsarbeit der Photokathode nimmt die Eigenerregung außerordentlich stark zu. Die Lebensdauer und die Stärke der Eigenerregung ist, wenn die Überspannung nicht zu groß genommen wird, dem Produkt aus Überspannung und Entladungszeit proportional. Ferner ist der Durchgang einer Entladung durch das Zählrohr bei positivem Zylinder nahezu ohne Einfluß, desgleichen ist ein Einfluß des Füllgases, ohne daß eine Entladung hindurchgegangen ist, nicht zu beobachten. Das läßt vermuten, daß die Ionenbeladung der Photokathode die Ursache der Eigenerregung ist.

Wie man leicht abschätzen kann, ist die Zahl der „erregenden“ Ionen von der Größenordnung 10^8 bis 10^{10} cm^{-2} , also bei weitem noch keine monoatomare Bedeckung.

Wie bekannt ist⁴⁾, führt die Oberflächenadsorption von Wasserstoffionen zu einer Herabsetzung der Austrittsarbeit. Es entstehen Inseln kleiner Austrittsarbeit, deren Gesamtfläche klein gegen die der Kathode ist. Die Felder dieser adsorbierten Ionen können in einigen Atomabständen

¹⁾ W. Cristoph, Ann. d. Phys. **23**, 747, 1935. — ²⁾ Mohler Oven, Publ. Amer. Astron. Soc. **9**, 14, 1937. — ³⁾ Hier muß bemerkt werden, daß es durchaus möglich ist, eigenerregungsfreie und äußerst empfindliche Zählrohre für sichtbares Licht herzustellen. Man darf nur das Rohr nicht entgasen, sowie die Hg-Dämpfe der Diffusionspumpe nicht ausfrieren. — Solche Rohre haben allerdings nur Lebensdauern von 1 bis 3 Tagen. Auch geben sie nur sehr schwache Stöße, da sie nur mit etwa 0,5 bis 1 Volt Überspannung betrieben werden können. Für manche Zwecke mögen sie aber von Nutzen sein. Besonders, wenn es gelingt, sie mit einfachen Mitteln zu regenerieren. — ⁴⁾ J. H. de Boer, Electron Emission and Adsorption Phenomena. S. 141. Cambridge 1935.

noch Felder von der Größenordnung 10^5 Volt/cm erreichen¹⁾, übertreffen also die Bildkraftfelder beträchtlich und führen zusammen mit dem angelegten Feld zur „Feldelektronenemission“. Diese kann noch durch mikroskopische Rauigkeiten der Kathodenoberfläche²⁾ charakterisiert — durch einen Grobfeinfaktor — begünstigt werden³⁾.

Jedes auf diese Weise abgesaugte Elektron zündet — genau wie ein Photoelektron einen Entladungsstoß. Man versteht so, warum die Eigenerrregung so wesentlich von der Vorgeschichte des Plasmas und der Kathode, sowie von der Überspannung abhängt und warum sie ein so langsam veränderlicher Zustand ist. Verwendet man ein elektronegatives Füllgas, z. B. Sauerstoff, so müßte die Adsorption desselben zu einer Erhöhung der Austrittsarbeit, also Verminderung der Eigenerrregung führen, was in der Tat beobachtet wird. Leider setzen die elektronegativen Gase die lichtelektrischen Ausbeuten von Alkalikathoden derart herunter, daß ihre Verwendung nicht lohnt.

Die Tatsache, daß auch bei Edelgasen — wenn auch im geringeren Maße — Eigenerrregung eintritt, ist wohl auf Spuren von Wasserstoff zurückzuführen, die sich weder aus dem Alkali, noch aus dem Edelgas vollkommen entfernen lassen. Beimischungen von 10^{-5} bis 10^{-8} Teilen Wasserstoff dürften ausreichen!

Um den Effekt der Eigenerrregung bei Zählrohren kleiner Austrittsarbeit zu vermeiden, ist es also nötig, die Ionen der Entladung von der Photokathode fernzuhalten. Das kann z. B. durch eine, nur für Elektronen durchlässige Folie geschehen, die die Photokathode vom Zählrohr-entladungsraum abtrennt. Es wurden zunächst Zaponlack- und Glimmerfolien verwendet, deren Stärke etwa 1000 \AA (gelb bis braun schillernd) und deren Durchmesser etwa 4 mm betrug. Diese wurden mit Picein aufgekittet. Da der Abstand Photokathode-Zähldraht aus technischen Gründen nicht kleiner als 10 cm sein konnte und ferner das Feld in der Umgebung der Photokathode — zur Vermeidung von Feldemission nicht 100 Volt/cm übersteigen durfte, so wurden die Photoelektronen mit einer aus drei kupfernen Lochblenden bestehenden elektrischen Linse (vgl. Fig. 1) auf den Zähldraht gebündelt, nachdem sie durch ein Beschleunigungsgitter homogene und parallele Geschwindigkeiten erhalten hatten. Die Photokathode, die

¹⁾ K. T. Compton, I. Langmuir, Rev. mod. Phys. **1**, 177, 1930; J. H. de Boer, ZS. f. Phys. **73**, 198, 1932. — ²⁾ W. Schottky, Handb. d. Exper. Phys. **13**, 259, 1928. — ³⁾ Auf diese Weise dürfte sich auch der an normalen ultravioletten Zählrohren beobachtete schwache Anstieg der Dunkel-Stoßspannungskurve erklären.

sich im Vakuum magnetisch verschieben läßt, wurde außerhalb der Optik durch die seitlich angesetzte Destillationsvorlage mit Kalium bedampft und dann in die Ebene des ersten, auf gleichem Potential liegenden Schutzringes gebracht. Der links von der Optik liegende Tubus, der an seinem Ende

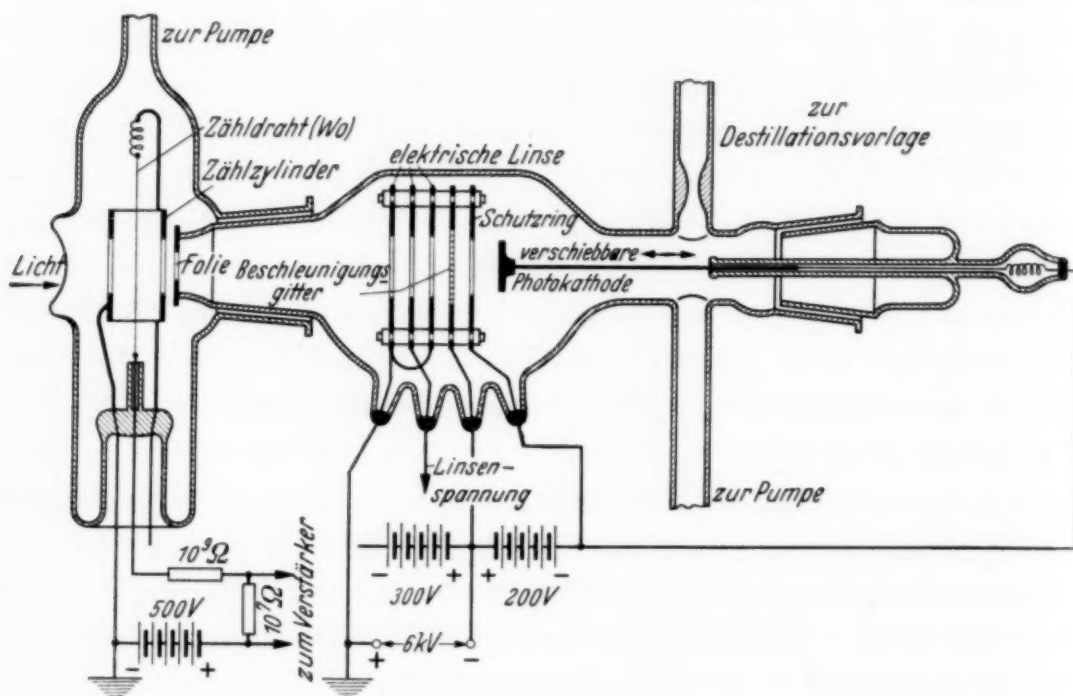


Fig. 1. Zählrohr für das sichtbare Spektralgebiet mit aufge kitteter Glimmerfolie.

die Folie trägt, wurde innen chemisch versilbert. Die Versilberung lag auf dem Potential der letzten Platte. So konnte eine schädliche Aufladung und Fluoreszenz der Glaswand vermieden werden.

Die Beschleunigungsspannung, die nötig war, um die Folie quantitativ zu durchdringen, lag zwischen 6000 und 7000 Volt. Es mußte sehr sorgfältig evakuiert werden, um Durchschläge innerhalb des Elektrodensystems der Optik zu vermeiden.

Der Zählrohrzylinder aus Nickel konnte durch einen Schliff dicht vor die Folie gebracht werden. Er trug zwei Bohrungen, welche erlaubten, die Photokathode von links durch das Fenster, den Zählzylinder, die Folie und die Optik hindurch zu beleuchten.

Kathodenraum und Zählrohrraum wurden zunächst kommunizierend evakuiert. Letzterer wurde dann durch ein elektrisch beheiztes Palladiumrohr mit 20 mm Wasserstoff gefüllt. Beide Rohrhälften wurden gleichzeitig von der Pumpe abgezogen. Ein solches Rohr zeigte die zu erwartenden Eigenschaften. Es arbeitete völlig eigenerregungsfrei und zeigte eine licht-

elektrische Ausbeute von etwa 1 Stoß pro 4000 blaue Lichtquanten, gemessen durch Vergleich mit einer absolut geeichten Na-Vakuum-Photozelle. Die Dunkelstoßzahlen lagen zwischen 10 und 20 pro min. Das Zählrohr mußte mit hohem Vorwiderstand und kleiner Überspannung betrieben werden, da sonst das Licht der Entladung auslösend auf die Photokathode wirkte. Solche abgezogenen Rohre hielten, wenn sie mit einer Kohle-Gasfalle verbunden waren, die dauernd in flüssige Luft tauchte, etwa 5 Tage. Dann ließ die Empfindlichkeit im sichtbaren Spektralgebiet schnell nach. Die Photokathode wurde durch Fett- und Piceindämpfe zugedeckt.

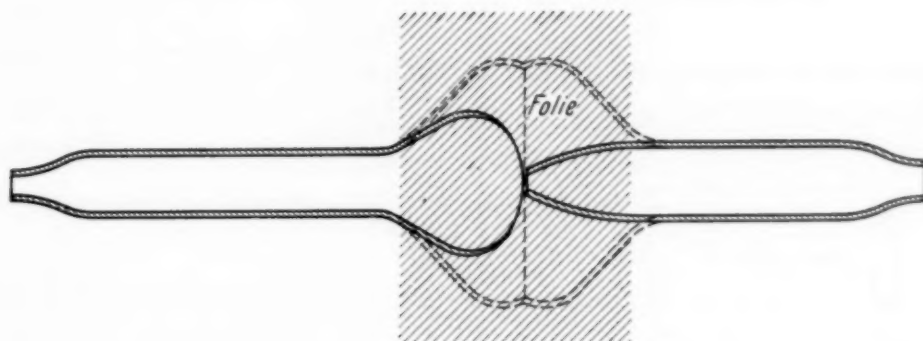


Fig. 2. Zur Herstellung einer Glasfolie.

Das Aufkitten von Glimmerfolien mit Chlorsilber und nachfolgendes Ausheizen auf 230°C brachte zwar das gewünschte Vakuum, jedoch wurde die Kittstelle stets nach einigen Tagen undicht, so daß sich der Druck zwischen den beiden Kammern ausgleichen konnte. Es mußte daher ein Folienmaterial ausfindig gemacht werden, das ohne Zuhilfenahme von Kitten hochvakuumdicht mit den Gefäßwandungen verbunden werden kann und zum Zwecke der Entgasung eine Temperatur von 300 bis 400°C auszuhalten vermag.

Als einziges Material kam Glas in Frage. Es wurde folgendes Verfahren entwickelt¹⁾, extrem dünne Glasfolien herzustellen und mit der Glaswand zu verschmelzen: Man erweitert ein Glasrohr (Innendurchmesser z. B. 10 mm) auf der einen Seite zu einer Kugel, deren Stirnfläche nur einige Hundertstel Millimeter stark ist (vgl. Fig. 2). Ein zweites gleiches Rohr verjüngt man auf der einen Seite auf einen Innendurchmesser von 1 bis 2 mm. Die äußeren Enden der beiden Rohre verbindet man mit einem gemeinsamen Blaseschlauch, so daß man kommunizierend in beide Rohre hineinblasen kann.

¹⁾ Ich möchte auch hier Herrn Hanff von der Firma Hanff und Buest, Berlin, meinen besten Dank aussprechen für alle die Mühe, die er auf die Herstellung von Glasfolien verwandt hat.

Erwärmt man nun den schraffierten Teil auf helle Rotglut — unter gleichmäßigem Drehen beider Rohre, setzt die Stirnfläche der Kugel auf die kleine Öffnung des anderen Rohres und bläst dann kurz und kräftig hinein, so erweitert sich das Mittelstück, wie gestrichelt gezeichnet, zu einer Folie, die um so dünner ist, je schneller aufgeblasen wurde, je kleiner der Ausgangsdurchmesser, je dünner die Stirnfläche der Kugel und je weiter man aufbläst. — Auf diese Weise lassen sich bei Durchmessern von 15 bis 50 mm

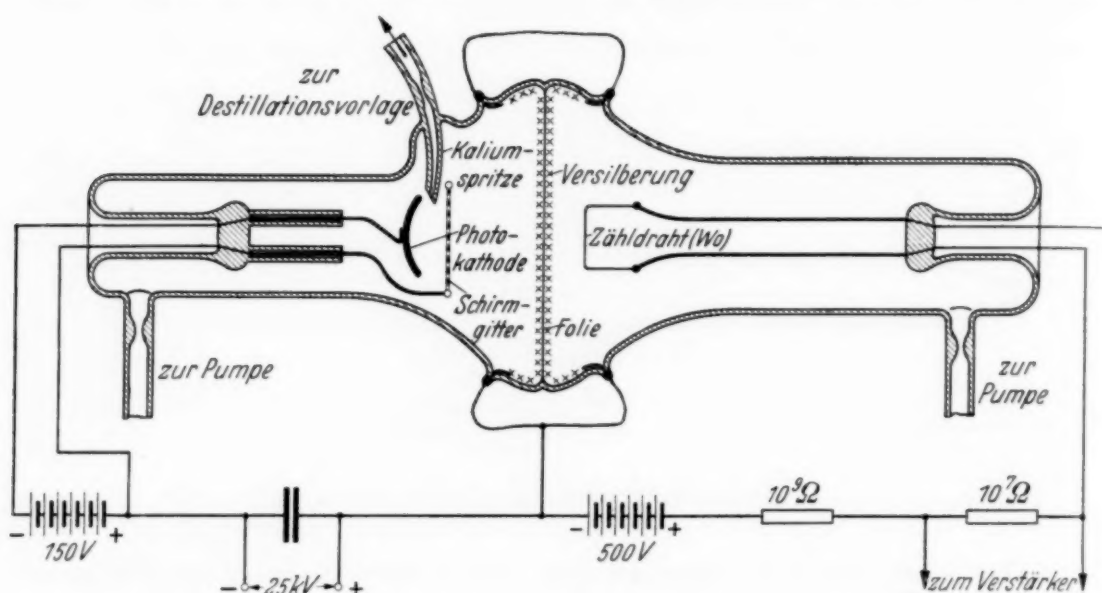


Fig. 3. Von der Pumpe abzählbares Zählrohr für das sichtbare Spektralgebiet mit verschmolzener Glasfolie.

Folien unter 1000 \AA Dicke herstellen, die ohne Gefahr bis zu 350°C ausgeheizt werden können und hochvakuumdicht sind. Sie sind sehr viel widerstandsfähiger gegen Druckdifferenzen als z. B. aufgekittete oder eingespannte Glas-, Glimmer- oder Celluloidfolien.

Die Durchlässigkeit solcher Glasfolien für Elektronen schwankt bei gleicher Interferenzfarbe ziemlich stark. Eine grün und rot schillernde Folie läßt Elektronen von über 25 e-kV jedoch mit Sicherheit ungehindert hindurch, während eine gelblich schillernde schon Elektronen von 10 kV passieren läßt.

Der Herstellungsweise der Glasfolien entsprechend können Photo-kathode und Entladungsraum sehr dicht an die Folie herangebracht werden. Die Elektronenoptik kann unter diesen Umständen wegfallen. Es hat sich auch als zweckmäßig erwiesen, das Zählrohr, welches die Photoelektronen registriert, durch eine Anordnung Platte—Draht zu ersetzen, wo jetzt die Folie die Rolle der Platte spielt. Fig. 3 zeigt schematisch den Aufbau und die Schaltung eines auf diese Weise vereinfachten Rohres.

Um die Folie einerseits als Beschleunigungselektrode für die Photoelektronen, andererseits als Kathode für die Zählentladung verwenden zu können, wurde diese mit Hilfe von nicht eingezeichneten Wo-Spiralen beidseitig durch Aufdampfen im Vakuum versilbert, und zwar nur so dünn, daß der Querwiderstand etwa 50000 Ohm betrug. Die Folie zeigte dann in der Durchsicht eine schwache blauviolette Färbung.

Vor der Photokathode, die zum Zwecke der Bündelung der Photoelektronen konkav gemacht wurde, befand sich ein dickdrähtiges Schirmgitter, welches das Feld der auf + 20 kV liegenden Folie von der Kathode fernhalten sollte.

Da die Folie nur eine Druckdifferenz von einigen Zentimetern Hg aushält, so mußte beim Ansetzen der Quetschfüße, der Einschmelzungen und der Destillationsvorlage sehr vorsichtig vorgegangen werden. Es wurde stets kommunizierend in beide Rohrhälften hineingeblasen. Das Auspumpen mußte sehr langsam und ebenfalls kommunizierend geschehen. Kleine Unterschiede im Strömungswiderstand der beiden Pumpleitungen zerstörten die Folie meist. Durch eine an die Destillationsvorlage angebrachte Düse, sowie durch Verwendung einer sehr kleinen Kaliummenge, wurde erreicht, daß im wesentlichen nur die Photokathode vom Kaliumdampf getroffen wurde. Das Rohr wurde im Ofen etwa 5 Stunden auf 350°C gehalten. Alle Metallteile wurden durch hochfrequente Wirbelströme ausgeglüht. Nach Aufdampfen des Kaliums wurde die Kathodenhälfte von der Pumpe abgezogen. Der Entladungsraum wurde dann mit 15 mm Wasserstoff gefüllt und ebenfalls abgezogen. Ein solches Rohr zeigte die zu erwartenden Eigenschaften. Es arbeitete völlig eigenerregungsfrei, zeigte nur während der ersten Minuten nach Anlegen der Hochspannung eine erhöhte Dunkelstoßzahl. Eine Erklärung dieses Effektes kann ich nicht geben. Die lichtelektrische Ausbeute war auch bei diesem Rohr von der Größenordnung 4000 blaue Lichtquanten pro Stoß.

Als Hochspannungsquelle diente zunächst mit Erfolg eine Influenzmaschine, die in Abständen von einer Minute eine Leidener Flasche auf 25 kV auflud, die direkt am Zählrohr lag. Auf diese Weise war es möglich, die Störungen des Zählrohrverstärkers durch die Influenzmaschine auf ein Mindestmaß herunterzudrücken. Leider zeigte sich nach einigen Tagen, daß die Folie kleine Mengen von Wasserstoff hindurchließ, so daß im Kathodenraum Entladungen auftraten. Wie langdauernde Versuche ergeben haben, ist jedoch die Wasserstoffdurchlässigkeit von Glasfolien keine allgemeine Erscheinung und scheint nur bei Folien mit faltiger oder

zerknitterter Struktur aufzutreten. Alterungserscheinungen konnte ich an Glasfolien nicht beobachten.

Ich möchte noch bemerken, daß die Arbeit ohne die tatkräftige Hilfe, besonders in experimentellen Fragen, von den Herren Prof. Dr. W. Grotrian, Prof. Dr. H. Kopfermann und Dr.-Ing. W. Walcher nicht zustande gekommen wäre. Ihnen allen danke ich herzlichst.

Den Herren Prof. H. Ludendorff, G. Hertz und H. Geiger bin ich für die Erlaubnis, in ihren Instituten arbeiten zu dürfen, sowie der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Gewährung eines Stipendiums, zu großem Dank verpflichtet.

Astrophysikalisches Observatorium Potsdam und Physikalisches Institut der T. H. Berlin-Charlottenburg.

Göttingen, Universitäts-Sternwarte, den 20. Juni 1937.

Über einige Mehrfachprozesse zwischen Elektronen, Positronen und Lichtquanten*).

Von **Bernhard Koekel.**

(Eingegangen am 17. Juli 1937.)

Die Wirkungsquerschnitte für Prozesse zwischen Elektronen, Positronen und Lichtquanten, bei denen zwei Lichtquanten beteiligt sind (Beispiel: Paarerzeugung durch zwei Lichtquanten), werden verglichen mit solchen Prozessen, bei denen drei Lichtquanten beteiligt sind (Beispiel: Paarerzeugung mit Entstehung eines dritten Lichtquants aus zwei Lichtquanten). Es ergibt sich, daß die Prozesse mit höherer Lichtquantenzahl von Energien von etwa 10^8 e-Volt ab eine erhebliche Rolle neben den einfachen Prozessen spielen.

Einleitung.

Nach der Diracschen Theorie gibt es für Elektronen Zustände mit positiver und negativer Energie. Die besetzten Zustände positiver Energie stellen Elektronen im eigentlichen Sinne dar. Die Zustände negativer Energie sind nach Dirac fast alle besetzt. Die nicht besetzten Zustände negativer Energie (die „Löcher“) stellen Positronen dar.

Unter dem Einfluß einer Störung können die Elektronen in einen anderen Zustand übergehen. Ausgangs- und Endzustand solcher Übergänge können positives oder negatives Energievorzeichen haben. Man kann also vier Arten von Übergängen unterscheiden:

Tabelle 1.

Energievorzeichen im		Physikalische Bedeutung
Anfangszustand	Endzustand	
+	+	Elektronensprung
+	—	Vernichtung eines Elektron-Positronpaares
—	+	Entstehung „ „
—	—	Positronensprung

Durch Einwirkung eines Lichtquants allein kann man in einem System von Elektronen und Positronen keine solchen Übergänge hervorrufen, weil man nicht zugleich Impuls- und Energiezustand befriedigen kann. Dagegen lassen sich bei Beteiligung zweier Lichtquanten oder bei Einwirkung eines Lichtquants auf Elektronen, die an einen Kern gebunden sind, Impuls- und Energiesatz zugleich erfüllen. Prozesse dieser Art sind z. B.

*) Gekürzte Dissertation der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig.

1. die Compton-Streuung (Elektronensprung unter Absorption und Emission je eines Lichtquants),
2. die Paarerzeugung durch zwei Lichtquanten,
3. die Paarvernichtung unter Aussendung zweier Lichtquanten,
4. die Bremsstrahlung (Elektronensprung im Kernfeld unter Emission eines Lichtquants),
5. die Paarerzeugung unter Einwirkung eines Lichtquants im Kernfeld.

Vergrößert man die Zahl der beteiligten Lichtquanten, so lassen sich Impuls- und Energiesatz natürlich erst recht befriedigen. Prozesse, an denen drei Lichtquanten beteiligt sind, sind z. B.

6. die Erzeugung eines Elektron-Positronpaares unter Absorption zweier Lichtquanten und gleichzeitiger Emission eines dritten Lichtquants,
7. die Erzeugung zweier Paare unter Absorption von drei Lichtquanten,
8. die „Doppel-Compton-Streuung“, d. h. ein Prozeß, bei dem ein einfallendes Lichtquant an einem Elektron in zwei Lichtquanten gestreut wird. Dieser Prozeß ist berechnet worden von Heitler und Nordheim¹⁾.

In dieser Arbeit sollen die Prozesse 6 und 7 untersucht werden.

Die Matrixelemente der Wechselwirkungsenergie zwischen Elektronen und Lichtquanten bedeuten das Entstehen oder Vergehen eines Lichtquants und den gleichzeitigen Übergang eines Elektrons in einen anderen Zustand. Berechnet man die Wahrscheinlichkeit für das Geschehen der oben aufgeführten Prozesse durch ein Störungsverfahren, in dem nach diesen Matrixelementen entwickelt wird, so sind eins bis drei Prozesse zweiter (oder vierter oder sechster . . .) Ordnung, sechs bis acht Prozesse dritter (oder fünfter oder siebenter . . .) Ordnung. Eine höhere als die zweite bzw. dritte Ordnung kann auftreten, weil man zu den mindestens erforderlichen zwei bzw. drei Matrixelementen noch solche hinzufügen kann, die das Entstehen und Wiederverschwinden weiterer Lichtquanten bedeuten.

Die Untersuchung von Prozessen dritter Ordnung ist von Interesse für die Frage, ob in der Höhenstrahlung Prozesse höherer Ordnung eine Rolle spielen können. Dies ist dann der Fall, wenn überhaupt oder wenigstens für bestimmte Energiebereiche Prozesse höherer Ordnung wahrscheinlicher oder annähernd ebenso wahrscheinlich werden wie Prozesse niedrigerer Ordnung. Da die Störungstheorie für Prozesse zwischen Elektronen und Lichtquanten eine Entwicklung nach $e^2/\hbar c$ liefert, kommt es darauf an, ob beim Übergang zu Prozessen höherer Ordnung Faktoren auftreten, die die Potenzen von $e^2/\hbar c$ wieder ausgleichen können.

¹⁾ W. Heitler u. L. Nordheim, *Physica* 1, 1059, 1934.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Der § 3 gibt für den Prozeß 6 die Wirkungsquerschnitte in zwei Annäherungen in dem Bezugssystem, in dem die Impulse der beiden absorbierten Lichtquanten gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind. Die erste Näherungsrechnung setzt voraus, daß der Impuls g_3 des entstehenden Lichtquants klein sei gegen die Impulse p des Elektrons, p_0 des Positrons und g der beiden einfallenden Lichtquanten. Sie hat zum Ergebnis, daß der Wirkungsquerschnitt dafür, daß das entstehende Lichtquant einen Impuls zwischen g_3 und $g_3 + dg_3$ hat, proportional zu dg_3/g_3 ist [vgl. Gleichung (53)]. Der Wirkungsquerschnitt dafür, daß der Prozeß 6 überhaupt geschieht, ist durch Integration über dg_3 aus dem vorigen Wirkungsquerschnitt zu berechnen. Dabei tritt wegen der Proportionalität zu dg_3/g_3 eine logarithmische Divergenz auf vom Integral über kleine g_3 , d. h. langwellige entstehende Lichtquanten. Die gleiche Divergenz erscheint auch bei anderen Prozessen, bei denen unter den entstehenden Teilchen beliebig langwellige Lichtquanten vorkommen können. Z. B. enthalten die Formeln für die Bremsstrahlung ein $d\nu/\nu$, wenn man nach der Wahrscheinlichkeit $W_\nu d\nu$ fragt, daß ein gebremstes Elektron Strahlung der Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ emittiert [vgl. etwa Formel (48. 13) der Betheschen Arbeit im Band 24.1 des Geiger-Scheelschen Handbuches]. Ebenso muß sich für die von Heitler und Nordheim berechnete „Doppel-Compton-Streuung“ (Prozeß 3 der Einleitung) ergeben, daß sich der Wirkungsquerschnitt dafür, daß eines der beiden Streuquanten einen Impuls zwischen g_i und $g_i + dg_i$ hat ($i = 1$ oder 2), für kleine g_i wie dg_i/g_i verhält, weil die Berechnung dieses Wirkungsquerschnitts sich von der für Prozeß 6 nur unterscheidet in einigen Bezeichnungen und einigen Energievorzeichen. Heitler und Nordheim brauchen die auftretende Divergenz nicht zu diskutieren, weil sie sich ausdrücklich nur für solche Fälle interessieren, in denen die beiden Streuquanten Impulse gleicher Größenordnung haben.

Die Divergenz kann in allen diesen Fällen kaum ein grundsätzliches Versagen der Quantenelektrodynamik bedeuten, weil sie im Gebiete langer Wellen auftritt, bei denen die klassische Strahlungstheorie und damit a fortiori die Quantenelektrodynamik zuständig sein muß¹⁾. Es scheint vielmehr, als ob der Grund für das Versagen der Rechnung in der Entwicklung nach einzelnen Lichtquanten, d. h. $e^2/\hbar c$, zu suchen ist. Genau so wie nur ein, können in den angeführten Prozessen auch mehrere langwellige Lichtquanten entstehen. Im Fall der Bremsstrahlung ist korrespondenz-

¹⁾ Diesen Gedankengang verdanke ich Herrn Prof. Heisenberg.

mäßig einzusehen, daß sogar sicher unendlich viele Lichtquanten beliebig kleiner Frequenz ausgesandt werden. Ein an einem Kern vorbeifliegendes Elektron strahlt nämlich nach der klassischen Theorie ein kontinuierliches Spektrum aus, dessen Intensität bei $\nu = 0$ endlich bleibt. Das bedeutet aber in der Sprache der Quantentheorie, daß die Anzahl ausgesandter Lichtquanten mit $\nu \rightarrow 0$ gegen ∞ geht¹⁾. Es ist also vermutlich das Verfahren, die verschiedenen Möglichkeiten für Elektronenbremsung, Compton-Streuung, Paarerzeugung und Paarvernichtung getrennt nach der Zahl der beteiligten Lichtquanten zu behandeln, zu ersetzen durch ein anderes, das diese Möglichkeiten zusammen behandelt. Rechnungen darüber gibt es noch nicht²⁾.

Die zweite Näherungsrechnung gilt für Impulse p, p_0, g, g_3 von gleicher Größenordnung, setzt aber voraus, daß p, p_0, g, g_3 und $g - g_3$ groß gegen mc sind und vernachlässigt 1 gegen die Logarithmen von $\frac{p}{mc}, \frac{p_0}{mc}, \frac{g}{mc}, \frac{g_3}{mc}$ und $\frac{g - g_3}{mc}$. Für den Gesamtwirkungsquerschnitt des Prozesses 6 erhält man

$$\Phi_{\text{III}} = 24 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{\left(\frac{g}{mc} \right)^2} \log^3 \frac{g}{mc} \quad (g \gg mc).$$

Dabei ist allerdings der Anteil des für kleine g_3 berechneten zu dg_3/g_3 proportionalen Wirkungsquerschnitts (siehe S. 155) überhaupt weggelassen worden.

Der Wirkungsquerschnitt des entsprechenden Prozesses zweiter Ordnung (einfache Paarerzeugung = Prozeß 2 der Einleitung) ist

$$\Phi_{\text{II}} = 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{g}{mc} \right)^2} \log \frac{g}{mc} \quad (g \gg mc)^3).$$

¹⁾ Siehe Anmerkung S. 155. — ²⁾ Anmerkung nach Fertigstellung der Arbeit: Inzwischen ist dieses Problem gelöst worden in einer demnächst erscheinenden Arbeit von F. Bloch u. B. Nordsieck, Phys. Rev., die wir durch die Freundlichkeit der Verfasser bereits vor dem Druck in Leipzig kennenlernen konnten. Es stellt sich dort heraus, daß für nicht zu kleine Lichtquantenenergien die üblichen Verfahren zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts ungefähr richtige Resultate liefern, daß die berechneten Wahrscheinlichkeiten z. B. für Prozeß 6 jedoch aufgefaßt werden müssen als Wahrscheinlichkeiten dafür, daß der Prozeß 6 geschieht und daß gleichzeitig unendlich viele Lichtquanten sehr kleiner Energie emittiert werden. Bei sehr kleinen Werten von g_3 versagen die hier abgeleiteten Formeln, das Integral über g_3 konvergiert jedoch nach Bloch und Nordsieck. — ³⁾ G. Breit u. J. A. Wheeler, Phys. Rev. **46**, 1097, 1934.

Um die in der Einleitung aufgeworfene Frage, ob für gewisse Energiebereiche Prozesse höherer Ordnung ebenso häufig oder häufiger werden als Prozesse niedrigerer Ordnung, für diesen speziellen Fall der Prozesse 2 und 6 zu entscheiden, muß man untersuchen, für welche Energiebereiche

$$\frac{\Phi_{\text{III}}}{\Phi_{\text{II}}} = \frac{12}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \log^2 \frac{g}{mc}$$

gleich oder größer als 1 wird. Hierbei ist der Faktor $12/\pi$ wegen der verschiedenen Unsicherheiten der Berechnung von Φ_{III} wohl noch um Beträge seiner eigenen Größenordnung unsicher. Trotzdem wird man nach dem genannten Ergebnis damit rechnen müssen, daß die Prozesse dritter Ordnung von Energien der Ordnung 10^8 e-Volt ab neben den Prozessen zweiter Ordnung eine erhebliche Rolle spielen.

§ 1. Die Diracsche Störungstheorie.

Die Diracsche Störungstheorie wird im folgenden abgeleitet in einer Form, die ihre Ergebnisse bis zu beliebiger Ordnung der Entwicklung abzulesen gestattet. Die Störungstheorie geht aus von der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial u}{\partial t} = H u. \quad (1)$$

H bestehe aus dem Energieoperator des ungestörten physikalischen Systems $H^{(0)}$ und Störgliedern erster, zweiter, dritter Ordnung usw. $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $H^{(3)}$... ($H^{(0)} \gg H^{(1)} \gg H^{(2)} \gg H^{(3)} \gg \dots$). Zu $H^{(0)}$ gehöre ein orthogonales Lösungssystem u_i ($i = i, k, l, m, r, s \dots$). Es sei angenommen, daß die u_i diskrete Eigenfunktionen sind. Diese Annahme kann von vornherein erfüllt sein. Ist sie es nicht, so kann man sie in jedem Falle verwirklichen, indem man das System in einen endlichen Raum V einschließt. Die gesuchte Funktion u werde entwickelt

$$u = \sum_i a_i u_i. \quad (2)$$

Ebenso werde entwickelt

$$H^{(v)} u_i = \sum_k u_k H_{ki}^{(v)} \quad (3)$$

und

$$a_i = a_i^{(0)} + a_i^{(1)} + a_i^{(2)} + \dots \quad (4)$$

Die $a_i^{(v)}$ und $H_{ki}^{(v)}$ seien Funktionen der Zeit. Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand

$$u = \sum_i a_i^{(0)} u_i \quad (5)$$

verwirklicht. Durch Einsetzen von (2) bis (5) ins (1) und Zusammenfassen der Größen, die das gleiche u_i enthalten und von gleicher Ordnung sind, erhält man

$$a_i^{(0)}(t) = \text{const} = a_i^{(0)}, \quad (6)$$

$$a_k^{(v)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \sum_i \int_0^t (H_{ki}^{(1)} a_i^{(v-1)} + H_{ki}^{(2)} a_i^{(v-2)} + \dots + H_{ki}^{(v)} a_i^{(0)}) dt. \quad (7)$$

Die t -Integration von (7) soll durchgeführt werden für den Fall, daß die $H_{ki}^{(v)}$ in der Form

$$H_{ki}^{(v)} = V_{ki}^{(v)} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_k)t}$$

mit von t unabhängigem $V_{ki}^{(v)}$ geschrieben werden können. Dies tritt ein, wenn die $H^{(v)}$ zeitunabhängig (Beispiel Elektron im Coulomb-Feld) oder zeitlich periodisch sind (Beispiel Elektronen unter dem Einfluß einer Lichtwelle). Im ersten Fall sind E_i und E_k einfach die Energien der Zustände i und k . Im zweiten Fall enthält $E_i - E_k$ außer der Differenz der Energien der Zustände i und k noch $\pm \hbar \omega$, wo ω die Frequenz der Störung ist. In beiden Fällen aber ist $E_i - E_k$ die im ganzen umgesetzte Energie; denn $\pm \hbar \omega$ stellt gerade die Energiebeträge dar, die eine zeitlich periodische Störung übertragen kann.

Für $a_k^{(1)}(t)$ erhält man

$$a_k^{(1)}(t) = \sum_i a_i^{(0)} V_{ki}^{(1)} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_k)t} - 1}{E_i - E_k} \quad (8)$$

und für $a_l^{(2)}(t)$

$$\begin{aligned} a_l^{(2)}(t) = \sum_i \sum_k a_i^{(0)} \frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{E_i - E_k} & \left(\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_l)t} - 1}{E_i - E_l} - \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t} - 1}{E_k - E_l} \right) \\ & + a_i^{(0)} V_{li}^{(2)} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_l)t} - 1}{E_i - E_l}. \end{aligned} \quad (9)$$

Man kann die Summe über k in ein Integral über dE_k verwandeln, also

$$\sum_k \rightarrow \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \quad (10)$$

setzen, wo $1/\Delta E_k$ die Dichte der durch k bezeichneten Zustände in der E_k -Skala bedeutet, wenn die E_k hinreichend dicht liegen¹⁾.

Da von den im Integranden nach (9) auftretenden Funktionen von E_k $e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t}$ für genügend große t die am stärksten variierende ist, heißt hinreichend dicht, daß

$$\Delta E_k \ll \frac{\hbar}{t} \quad (11)$$

sein muß.

Der Ausdruck (9) ist an keiner der Nullstellen der Nenner singulär. Für die Integration der einzelnen Summanden von (9) steht es mir also frei, an deren singulären Stellen festzusetzen: Wenn $f(x)$ bei $x = a$ singulär ist, soll die Integration auf einem negativ-imaginären Wege um a herumgeführt werden. Diese Definition wird gewählt, weil nach ihr eines der Teilintegrale, in die $a_l^{(2)}(t)$ zerfällt,

$$\int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)} a_i^{(0)}}{(E_i - E_k)(E_k - E_l)} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t} \quad (12)$$

verschwindet, wenn die zusätzliche Annahme erfüllt ist, daß für genügend große t $\frac{1}{\Delta E_k} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}$ als Funktion von E_k fast konstant ist in jedem Intervall der Größenordnung \hbar/t . Fast konstant heißt

$$\left| \frac{\partial}{\partial E_k} \left(\frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{\Delta E_k} \right) \frac{\hbar}{t} \right| \ll \left| \frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{\Delta E_k} \right|. \quad (13)$$

Gilt das, so ist für $|E_i - E_k| \gg \hbar/t$ und $|E_k - E_l| \gg \hbar/t$ auch

$$\frac{1}{\Delta E_k} \cdot \frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_k - E_l)}$$

langsam veränderlich gegen $e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t}$. Bei der Integration können also nur die Gebiete, in denen $|E_i - E_k| \sim \hbar/t$ oder $|E_k - E_l| \sim \hbar/t$ oder beides zugleich der Fall ist, einen Beitrag geben. Für solche Gebiete kann wegen der eben eingeführten Annahme entweder $\frac{1}{\Delta E_k} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}$ und einer

¹⁾ Grenzen sind nicht angegeben, weil es gut vorkommen kann, daß E_k -Intervalle ausfallen und über andere mehrfach integriert werden muß. Damit dann noch die Schlußfolge (12) bis (15) (siehe unten) möglich ist, müssen die Stellen $E_k = E_i$ und $E_k = E_l$ „genügend weit“ von Umkehrpunkten, Anfangs- oder Endpunkten der Integration entfernt sein.

der Nennerfaktoren oder nur $\frac{1}{\Delta E_k} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}$ vor das Integral gezogen werden, und man erhält für (12) entweder (14) oder (14'):

$$a_i^{(0)} \left\{ \left(\frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{\Delta E_k} \cdot \frac{1}{E_k - E_l} \right)_{E_i = E_k} \int_{E_i - b}^{E_i + b} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t}}{E_i - E_k} dE_k \right. \\ \left. + \left(\frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{\Delta E_k} \cdot \frac{1}{E_i - E_k} \right)_{E_k = E_l} \int_{E_l - b}^{E_l + b} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t}}{E_k - E_l} dE_k, \right. \quad (14)$$

$$a_i^{(0)} \left(\frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{\Delta E_k} \right)_{E_i = E_k = E_l} \int_{E_i - b}^{E_i + b} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_k - E_l)t}}{(E_i - E_k)(E_k - E_l)} dE_k, \quad (14')$$

wobei b mehrere \hbar/t umfaßt. Die Integrale in (14) und (14') können, ohne daß ein Fehler entsteht, zu Integralen von $-\infty$ bis $+\infty$ erweitert werden. Sie verschwinden dann, weil man den Integrationsweg ins Negativ-imaginär-unendliche ziehen kann. Damit verschwindet auch (12), und es ergibt sich

$$a_i^{(2)}(t) = a_i^{(0)} \left\{ \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{E_i - E_k} + V_{li}^{(2)} \right\} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_l)t} - 1}{E_i - E_l} \\ + a_i^{(0)} \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_k - E_l)}. \quad (15)$$

$a_i^{(2)}(t)$ zerfällt also in einen Teil mit dem Faktor $\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_l)t} - 1}{E_i - E_l}$ und einen Rest, der von t nicht abhängt. Für jede höhere Ordnung tritt dasselbe ein:

$$a_s^{(v)}(t) = a_i^{(0)} \left[\int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \int \frac{dE_l}{\Delta E_l} \dots \int \frac{dE_r}{\Delta E_r} \frac{V_{sr}^{(1)} V_{rq}^{(1)} \dots V_{nm}^{(1)} V_{ml}^{(1)} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)(E_i - E_m) \dots (E_i - E_r)} \right. \\ \left. + \text{Glieder mit } V^{(2)} \text{ bis } V^{(v)} \right] \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_s)t} - 1}{E_i - E_s} + A, \quad (16)$$

wo A von t nicht abhängt. Das gesamte $a_s(t) = a_s^{(0)}(t) + a_s^{(1)}(t) + a_s^{(2)}(t) + \dots$ läßt sich also schreiben:

$$a_s(t) = a_s^{(0)} + \sum_i a_i^{(0)} B_{si} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_s)t} - 1}{E_i - E_s} + A', \quad (17)$$

wo wieder A' von t unabhängig ist und B_{si} die Summe aller in $a_s^{(1)}(t)$, $a_s^{(2)}(t) \dots$ gemäß (16) auftretenden eckigen Klammern ist,

$$B_{si} = V_{si}^{(1)} + \left[\int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{E_i - E_k} + V_{si}^{(2)} \right] + \left[\int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \int \frac{dE_l}{\Delta E_l} \frac{V_{sl}^{(1)} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} \right. \\ \left. + \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(2)} V_{ki}^{(1)} + V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(2)}}{E_i - E_k} + V_{si}^{(3)} \right] + \dots \quad (18)$$

Hier werde nun die Annahme eingeführt, daß zu Anfang ein reiner Zustand mit dem Index i verwirklicht ist. Es ist also:

$$a_j^{(0)} = \delta_{ij} \quad (j = i, k, l, m, n, r, s \dots), \quad (19)$$

und damit für $s \neq i$:

$$a_s(t) = B_{si} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_s)t} - 1}{E_i - E_s} + A'. \quad (20)$$

Die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit t das System im Zustand s zu finden, ist $|a_s(t)|^2$. Die Wahrscheinlichkeit W dafür, daß bis zur Zeit t ein Übergang geschehen ist in eine Gesamtheit von nach irgendeinem Prinzip ausgewählten Zuständen s (z. B. bei Streuprozessen ein Übergang in solche Zustände, die einer Streuung in einen bestimmten Raumwinkelbereich entsprechen), ist

$$W = \int \frac{dE_s}{\Delta E_s} |a_s(t)|^2. \quad (21)$$

Die Integration in (21) ist unter den gleichen Bedingungen vernünftig wie die in (10). $1/\Delta E_s$ ist die Dichte der betrachteten Endzustände s in der E_s -Skala. Einsetzen von (20) in (21) liefert

$$W = \int \frac{dE_s}{\Delta E_s} \left\{ |B_{si}|^2 \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2\hbar} (E_i - E_s)}{(E_i - E_s)^2} + B_{si} A'^* \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_s)t} - 1}{E_i - E_s} + B_{si}^* A' \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(E_i - E_s)t} - 1}{E_i - E_s} + |A'|^2 \right\}. \quad (22)$$

Der erste Summand in der geschweiften Klammer hat an der Stelle $E_i = E_s$ ein desto höheres und schärferes Maximum (Höhe proportional zu t^2 , Breite proportional zu $1/t$), je größer t ist. Das bedeutet, daß es nur für solche Übergänge $i \rightarrow s$, für die $E_i = E_s$, d. h. der Energiesatz erfüllt ist, eine der Zeit proportionale Übergangswahrscheinlichkeit gibt. Wegen der mit der Zeit steigenden Schärfe des Maximums kann man $\frac{1}{\Delta E_s} |B_{si}|^2$ vor das Integral ziehen und dieses von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken. Man erhält so

$$W = \left(\frac{1}{\Delta E_s} |B_{si}|^2 \right)_{E_i = E_s} \int_{-\infty}^{+\infty} dE_s \frac{4 \sin^2 \frac{t}{2\hbar} (E_i - E_s)}{(E_i - E_s)^2}, \quad (23)$$

$$W = \left(\frac{2\pi t}{\hbar \Delta E_s} |B_{si}|^2 \right)_{E_i = E_s}. \quad (24)$$

W ist nach (18) eine Summe von Größen verschiedener Ordnung (ν). Nennt man die Summe aller Glieder bis einschließlich der Ordnung (2ν) die Übergangswahrscheinlichkeit ν -ter Ordnung $W^{(\nu)}$, so ist

$$W^{(1)} = \frac{2\pi t}{\hbar \Delta E_s} |V_{si}^{(1)}|^2 \quad (E_i = E_s), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} W^{(2)} = \frac{2\pi t}{\hbar \Delta E_s} & \left[|V_{si}^{(1)}|^2 + \left\{ V_{si}^{(1)*} \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{E_i - E_k} + \text{konj.} \right. \right. \\ & + V_{si}^{(1)*} V_{si}^{(2)} + \text{konj.} + \left. \left\{ \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{E_i - E_k} + V_{si}^{(2)} \right\}^2 \right. \\ & + V_{si}^{(1)*} \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \int \frac{dE_l}{\Delta E_l} \frac{V_{sl}^{(1)} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} + \text{konj.} \\ & + V_{si}^{(1)*} \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(2)} V_{ki}^{(1)} + V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(2)}}{E_i - E_k} + \text{konj.} \\ & \left. \left. + V_{si}^{(1)*} V_{si}^{(3)} + \text{konj.} \right\} \right] \quad (E_i = E_s). \quad (26) \end{aligned}$$

Im allgemeinen begnügt man sich mit der Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit in der frühesten von Null verschiedenen Ordnung. So bedeutet z. B. $W^{(1)} = 0$, daß $V_{si}^{(1)} = 0$ ist, für $E_i = E_s$ und $W^{(2)}$ sich vereinfacht zu

$$W^{(2)} = \frac{2\pi t}{\hbar \Delta E_s} \left| \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{E_i - E_k} + V_{si}^{(2)} \right|^2 \quad (E_i = E_s). \quad (27)$$

Ist auch $W^{(2)} = 0$, so berechnet man $W^{(3)}$ und erhält

$$\begin{aligned} W^{(3)} = \frac{2\pi t}{\hbar \Delta E_s} & \left| \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \int \frac{dE_l}{\Delta E_l} \frac{V_{sl}^{(1)} V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} \right. \\ & \left. + \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \frac{V_{sk}^{(2)} V_{ki}^{(1)} + V_{sk}^{(1)} V_{ki}^{(2)}}{E_i - E_k} + V_{si}^{(3)} \right|^2 \quad (E_i = E_s) \quad (28) \end{aligned}$$

und allgemein

$$\begin{aligned} W^{(\nu)} = \frac{2\pi t}{\hbar \Delta E_s} & \left| \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} \int \frac{dE_l}{\Delta E_l} \cdots \int \frac{dE_r}{\Delta E_r} \frac{V_{sr}^{(1)} V_{rq}^{(1)} \cdots V_{lk}^{(1)} V_{ki}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l) \cdots (E_i - E_r)} \right. \\ & \left. + \text{Glieder mit } V^{(2)} \text{ bis } V^{(\nu)} \right|^2 \quad (E_i = E_s). \quad (29) \end{aligned}$$

Will man die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit haben, muß man den Faktor t streichen. In den Gleichungen (25) bis (29) kann man bei hermitescher $V^{(\nu)}$ -Matrix $V_{ji}^{(\nu)}$ durch $V_{ij}^{(\nu)}$ ersetzen, ohne einen Fehler zu begehen. Diese Schreibweise hat den Vorteil, daß man jetzt der Reihenfolge i, k, l, s der Indizes das Bild „aufeinander folgender“ Übergänge vom

Anfangszustand i über den Zwischenzustand k zu einem zweiten Zwischenzustand l und schließlich zum Endzustand s zuordnen kann. Man erhält, wenn man zugleich wieder zu Summen über $k, l \dots$ zurückgeht, z. B.

$$W_{\text{pro sec}}^{(3)} = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E_s} \left| \sum_k \sum_l \frac{V_{ik}^{(1)} V_{kl}^{(1)} V_{ls}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} + \sum_k \frac{V_{ik}^{(1)} V_{ks}^{(2)} + V_{ik}^{(2)} V_{ks}^{(1)}}{E_i - E_k} + V_{is}^{(3)} \right|^2 \quad (E_i = E_s). \quad (30)$$

Die Formel (30) soll für die Durchrechnung der in der Einleitung aufgeführten Prozesse benutzt werden.

Anmerkung 1. Wenn statt der oben eingeführten Integraldefinition die üblichere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\varepsilon} f(x) dx + \int_{a+\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right\}$$

verwendet werden soll, so sind in (26) bis (29) die Nenner $E_i - E_k, E_i - E_l \dots$ zu ersetzen durch Faktoren

$$\left(\frac{1}{E_i - E_k} - i\pi \delta(E_i - E_k) \right), \left(\frac{1}{E_i - E_l} - i\pi \delta(E_i - E_l) \right) \dots *).$$

Anmerkung 2. Nach (21) ergibt sich die Übergangswahrscheinlichkeit als ein Integral über dE_s , die „Endenergie“. Dieses Integral ist über sämtliche möglichen Werte E_s und nicht nur über die Nachbarschaft der Stelle $E_s = E_i$, für die die Endenergie gleich der Anfangsenergie ist, zu erstrecken. Für den Fall einer Übergangswahrscheinlichkeit erster Ordnung soll untersucht werden, welche Bedeutung die verschiedenen in das Integral eingehenden E_s -Bereiche haben. Dazu dient die folgende Überlegung:

1. Nach dem Einschalten der Störung sind die u_i nicht mehr Eigenfunktionen des Systems. Die neuen Eigenfunktionen sind Summen $a_s u_s$. $|a_s(t)|^2$ enthält also Terme, die nur scheinbar eine Übergangswahrscheinlichkeit vom Anfangszustand in den Zustand s darstellen, in Wirklichkeit aber von dieser Entwicklung stammen.

2. Das unendlich plötzliche Einschalten der Störung zur Zeit $t = 0$ bedeutet eine starke Erschütterung des Systems (Schüttelwirkung des Einschaltens).

Die Einflüsse von 1. und 2. lassen sich beseitigen. Dazu nimmt man an, daß die Störung nur eine beschränkte Zeit lang (von $t = -t_0$ bis $t = +t_0$) vorhanden ist. Dadurch sind für $t > t_0$ wieder die u_i exakte Eigenfunktionen. Weiter führt man eine Funktion ψ ein¹⁾, die dafür sorgt, daß die Störung allmählich einsetzt und allmählich verklingt. Eine dafür geeignete Funktion ist

$$\psi = \Phi(t + t_0) - \Phi(t - t_0); \quad \text{wo} \quad \Phi(t) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\alpha^2 \tau^2} d\tau$$

*) Einen Faktor der gleichen Form erhält Dirac bei der Berechnung von Stoßproblemen durch ein Störungsverfahren (P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik, Kap. X). — ¹⁾ Den Gedanken, eine solche Funktion einzuführen, verdanke ich Herrn Prof. Heisenberg.

ist. Die Dauer des Ein- und Ausschaltens ist dabei ungefähr gleich $1/\alpha$. Deshalb ist anzunehmen, daß $t_0 \gg 1/\alpha$ ist. Geht man mit $H_{ki}^{(1)} = V_{ki}^{(1)} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_i - E_k)t}$ in (7) ein, benutzt gleich die Annahme (19) und integriert, so folgt

$$a_k^{(1)}(t) = -V_{ki}^{(1)} \frac{2ie^{-\frac{1}{4\alpha^2\hbar^2}(E_i - E_k)^2} \sin \frac{t_0}{\hbar}(E_i - E_k)}{E_i - E_k}$$

und

$$W^{(1)} = \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} |a_k^{(1)}(t)|^2 = \int \frac{dE_k}{\Delta E_k} |V_{ki}^{(1)}|^2 \frac{4e^{-\frac{1}{2\alpha^2\hbar^2}(E_i - E_k)^2} \sin^2 \frac{t_0}{\hbar}(E_i - E_k)}{(E_i - E_k)^2}.$$

Man sieht, daß nur ein Bereich $|E_i - E_k| < \hbar\alpha$ wesentlich zu $W^{(1)}$ beiträgt. Durch Verkleinern von α , d. h. vorsichtigeres Einschalten, kann man diesen Bereich beliebig klein machen. Das Maximum des Integranden bei $E_i = E_k$ bleibt natürlich bestehen.

$|a_k^{(1)}(t)|^2$ ist also ~ 0 für $|E_i - E_k| > \hbar\alpha$,

$$\sim |V_{ki}^{(1)}|^2 \frac{2}{(E_i - E_k)^2} \quad \text{für } |E_i - E_k| < \hbar\alpha,$$

dies entspricht Übergängen durch die Schüttelwirkung des Ein- und Ausschaltens,

$$\sim |V_{ki}^{(1)}|^2 \frac{4t_0^2}{\hbar^2} \quad \text{für } |E_i - E_k| < \frac{\hbar}{t_0},$$

dies entspricht wirklichen, durch die Störung hervorgerufenen, dem Energiesatz gehorchenden Übergängen.

Sieht man $\frac{|V_{ki}^{(1)}|^2}{\Delta E_k}$ als fast konstant an in einem Bereich $|E_i - E_k| \sim \hbar\alpha$, so folgt

$$W^{(1)} = \frac{|V_{ki}^{(1)}|^2}{\Delta E_k} \left(\frac{4\pi t_0}{\hbar} - \frac{2}{\hbar\alpha} \sqrt{2\pi} \right) \quad (E_i = E_k).$$

Weil $2t_0$ gleich der gesamten Störungszeit und $t_0 \gg 1/\alpha$ ist, ist dies das alte Resultat (27). Der Zusatz $-\frac{2}{\hbar\alpha} \sqrt{2\pi} \frac{1}{\Delta E_k} |V_{ki}^{(1)}|^2$ ist verständlich, weil die Störungsdauer $2t_0$ nur bis auf Korrekturen von ungefähr $\pm 1/\alpha$ definiert ist.

§ 2. Spezialisierung der Störungstheorie für Prozesse zwischen Elektronen, Positronen und Lichtquanten.

Es bezeichnen:

V ein Normierungsvolumen,

$g, g_1, g_2, g_3, g'_3, g_i, g_k$ die Impulse von Lichtquanten,

$g, g_1, g_2, g_3, g'_3, g_i, g_k$ die Beträge dieser Impulse,

$e, e_1, e_2, e_3, e_i, e_k$ Polarisationsvektoren der Lichtquanten,

$p, p', p'', p_0, p_1, p_2, p - g_k, p_0 + g_i$ Impulse von Elektronen und Positronen,

$E, E', E'', E_0, E_1, E_2, E_{p-g_k}, E_{p_0+g_i}$ die zugehörigen Energien (alle $E > 0!!$),

E_i, E_k, E_l, E_m die Energien von Gesamtzuständen, d. h. von materiellen Teilchen und Lichtquanten,

$a, a', a'', a_0, a_1, a_2$ die vierkomponentigen Diracschen Amplituden der Eigenfunktionen für ungestörte Teilchen vom Impuls $p, p', p'', p_0, p_1, p_2$,
 $+, -$ als obere Indizes, λ, μ die Energievorzeichen von Elektronenzuständen,
 $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ die Spinkoordinaten von Elektronenzuständen,
 $\chi, \chi', \chi'', \chi_n$ die Jordan-Wignerschen Vorzeichenfunktionen von aus allen vorhandenen Elektronen gebildeten Gesamtzuständen:

$$\chi_n = \prod_{m \leq n} (1 - 2 N_m),$$

wobei sich $m \leq n$ auf eine beliebig vorgebbare, aber dann für die gesamte Rechnung festzuhaltende Numerierung der Elektronenzustände bezieht und N_m die Besetzungszahl ist.

p, E, a, σ bleiben vorbehalten für das im Prozeß 6 entstehende Elektron,
 p_0, E_0, a_0, σ_0 bleiben vorbehalten für das im Prozeß 6 entstehende Positron.
 Die Energievorzeichen und Spinkoordinaten werden nur dort mitgeschrieben, wo es zur Unterscheidung notwendig ist.

In einem System von Elektronen, Positronen und Lichtquanten oder, was nach der Löchertheorie dasselbe ist, einem System von Elektronen in positiven und negativen Energiezuständen und Lichtquanten sind die ungestörten Eigenfunktionen u_i der Elektronen ebene Wellen. Bei Normierung auf das Volumen V gilt

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{V}} a_i e^{\frac{i}{\hbar} (p_i r - E_i t)}. \quad (31)$$

Die durch das Licht bedingten Störungsglieder erster Ordnung in der Hamilton-Funktion bedeuten das Entstehen oder Verschwinden eines Lichtquants vom Impuls g und dem Polarisationsvektor e und den Sprung eines Elektrons von einem Zustand (p', σ', λ') in einen anderen Zustand $(p'', \sigma'', \lambda'')$. Sie heißen

$$\int_V \frac{d\mathbf{r}}{V} e^{-\frac{i}{\hbar} (p' \pm g - p'') \cdot \mathbf{r}} e^{\frac{i}{\hbar} (E' \pm cg - E'') t} \{a_{p', \sigma', \lambda'}^* | \alpha e | a_{p'', \sigma'', \lambda''}\} e \sqrt{\frac{c\hbar}{gV}}. \quad (32)$$

Die oberen Vorzeichen bei g und cg gelten bei Verschwinden, die unteren bei Entstehen des Lichtquants (g, e) . (32) hat die gewünschte Form (vgl. S. 158).

Dabei ist

$$V_{ik}^{(1)} = \int_V \frac{d\mathbf{r}}{V} e^{-\frac{i}{\hbar} (p' \pm g - p'') \cdot \mathbf{r}} \{a_{p', \sigma', \lambda'}^* | \alpha e | a_{p'', \sigma'', \lambda''}\} e \sqrt{\frac{c\hbar}{gV}} \quad (33)$$

und $E_i - E_k$ gleich der im gesamten System bei dem betreffenden Übergang verschwindenden Energie

$$E_i - E_k = E' \pm cg - E''. \quad (34)$$

Die Bedingungen (11) und (13) von § 1 sind für genügend große t und V erfüllt. Die Integration über den Ortsraum, die in (33) auftritt, erzwingt

wegen des Faktors $e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}' \pm \mathbf{g} - \mathbf{p}'') \cdot \mathbf{r}}$ die Gültigkeit des Impulssatzes. (33) kann also ersetzt werden durch

$$V_{ik}^{(1)} = e \sqrt{\frac{c\hbar}{gV}} \{a_{\mathbf{p}', \sigma', \lambda', \chi'}^* | \alpha e | a_{\mathbf{p}'', \sigma'', \lambda'', \chi''}\}, \quad (35)$$

sofern man nur $\mathbf{p}' \pm \mathbf{g} - \mathbf{p}'' = 0$ anmerkt.

Die Störglieder höherer Ordnung in der Hamilton-Funktion $H^{(2)}$, $H^{(3)}$, $H^{(4)}$ eines Systems von Elektronen und Lichtquanten kombinieren Lichtquanten, für die bestimmte Impulsbeziehungen gelten¹⁾. Sie sind deshalb für die in der Einleitung genannten Prozesse nicht von Belang.

Die Formel (30) vereinfacht sich also zu

$$W_{\text{pro sec}}^{(3)} = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E_m} \left| \sum \frac{V_{ik}^{(1)} V_{kl}^{(1)} V_{lm}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} \right|^2. \quad (36)$$

Dabei sind zu dieser Formel drei Anmerkungen zu machen:

1. Für den gesamten Übergang gilt der Energiesatz $E_i = E_m$.
2. Für die Teilübergänge $i \rightarrow k$, $k \rightarrow l$, $l \rightarrow m$ gilt der Impulssatz.
3. \sum heißt Summe über alle mit 1. und 2. verträglichen Übergangsmöglichkeiten $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow m$.

Außer unter den Wurzeln $\sqrt{\frac{c\hbar}{gV}}$ treten wegen

$$\mathbf{p}'' = \mathbf{p}' \pm \mathbf{g} \text{ und } E_i - E_k = E' \pm cg - E''$$

in der Formel (36) für die Übergangswahrscheinlichkeit die Impulse emittierter und absorbiert Lichtquanten mit entgegengesetzten Vorzeichen auf. Man kann also die Berechnung sämtlicher zwischen Elektronen, Positronen und Lichtquanten möglichen Prozesse in den Lichtquantenimpulsen und -energien symmetrisieren, wenn man für ein während des Prozesses zu emittierendes Lichtquant schreibt:

$$\begin{aligned} & -g' \text{ statt } g, \\ & -cg' \text{ statt } cg \quad (g' \text{ also } < 0). \end{aligned}$$

Dies sei, wo es von Vorteil ist, durchgeführt.

§ 3. Bildung eines Paares und eines Lichtquants aus zwei Lichtquanten.

Bezeichnungen:

- 2 absorbierte Lichtquanten: g_1, e_1 und g_2, e_2 ,
- 1 emittiertes Lichtquant: g_3, e_3 ,
- 1 entstehendes Elektron: p, E, σ ,
- 1 entstehendes Positron: $-p_0, E_0, \sigma_0$.

¹⁾ W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 90, 227—228, 1934.

(Der dem Positron entsprechende nicht besetzte Elektronenzustand negativer Energie ist also $p_0, -E_0, \sigma_0$.)

1. Das Aufsuchen aller Übergangsmöglichkeiten. Wie man alle Übergangsmöglichkeiten, die zu einem bestimmten Prozeß gehören, auffindet, sei gleich an Prozeß 6 erläutert. Die Diracsche Vorstellung vom Positron als einem „Loch“ in der sonst vollständigen Besetzung der Elektronenzustände negativer Energie führt in Verbindung mit der Paulischen Besetzungsregel zu sechs Möglichkeiten einer Paarerzeugung bei Beteiligung von drei Lichtquanten.

Tabelle 2.

	1. Übergang	2. Übergang	3. Übergang
I	Paarerzeugung ($p_0^- \rightarrow p_1^+$)	Elektronensprung ($p_1^+ \rightarrow p_2^+$)	Elektronensprung ($p_2^+ \rightarrow p^+$)
II	„ ($p_1^- \rightarrow p_2^+$)	„ ($p_2^+ \rightarrow p^+$)	Positronensprung ($p_0^- \rightarrow p_1^-$)
III	„ ($p_1^- \rightarrow p_2^+$)	Positronensprung ($p_0^- \rightarrow p_1^-$)	Elektronensprung ($p_2^+ \rightarrow p^+$)
IV	„ ($p_2^- \rightarrow p^+$)	„ ($p_1^- \rightarrow p_2^-$)	Positronensprung ($p_0^- \rightarrow p_1^-$)
V	„ ($p_0^- \rightarrow p_1^+$)	Paarerzeugung ($p_2^- \rightarrow p^+$)	Paarvernichtung ($p_1^+ \rightarrow p_2^-$)
VI	„ ($p_2^- \rightarrow p^+$)	„ ($p_0^- \rightarrow p_1^+$)	„ ($p_1^+ \rightarrow p_2^-$)

Die Klammern zeigen stets den dem betreffenden Vorgang nach der Diracschen Löchertheorie entsprechenden Elektronensprung an. Die Bezifferung der p ist so eingerichtet, daß das nach dem dritten Übergang vorhandene Paar die Impulse p und $-p_0$ hat. p_1 und p_2 sind Impulse von Zwischenzuständen. Die einzelnen Übergänge geschehen jeweils unter Aufnahme eines der drei Lichtquantenimpulse $g_1, g_2, g_3' = -g_3$. Die Reihenfolge, in der g_1, g_2 und g_3' aufgenommen werden, ist dabei beliebig. Die in den Zwischenzuständen entstehenden und wieder verschwindenden Elektronen und Positronen können jeden ihrer beiden Spinzustände annehmen. Summe über alle Übergangsmöglichkeiten heißt also:

$$\left. \begin{aligned} &\sum \text{über die Fälle I bis VI der Tabelle 2,} \\ &\sum \text{über die Spinkoordinaten der Zwischenzustände,} \\ &\sum \text{über die Permutationen der Lichtquanten } g_1, g_2, g_3' \left(\sum_{\mathfrak{P}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Bildet man nach (35) und (36) die erste dieser drei Summen für die durch

$$p_1 = p_0 + g_1, p_2 = p_0 + g_1 + g_2, p = p_0 + g_1 + g_2 + g_3' \quad (38)$$

bestimmte Lichtquantenpermutation, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{i=VI} \frac{V_{ik}^{(1)} V_{kl}^{(1)} V_{lm}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} \\ &= \sum_{\lambda, \mu = \pm 1} e^3 \sqrt{\frac{c^3 h^3 h^3}{V^3 g_1 g_2 g_3}} \frac{\{a_0^* | \alpha e_1 | a_1^{\lambda}\} \{a_1^{\lambda*} | \alpha e_2 | a_2^{\mu}\} \{a_2^{\mu*} | \alpha e_3 | a\}}{(E_0 + \lambda E_1 - c g_1)(\mu E_2 - E + c g_3)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Auch ein anderer Gedankengang, der der zugrunde gelegten Diracschen Löchertheorie insofern widerspricht, als er zwar für das im gesamten Prozeß entstehende Positron die Vorstellung eines Loches in der See der Zustände negativer Energie benutzt, aber bei den Zwischenzuständen die Paulische Besetzungsregel außer acht läßt, führt zum richtigen Ergebnis. Dieser andere Gedankengang lautet: In drei Teilübergängen soll ein Paar entstehen oder, was dasselbe heißt, ein Elektron von einem Zustand negativer Energie zu einem Zustand positiver Energie übergehen. Die Energievorzeichen der beiden Zwischenzustände sind beliebig. Damit hat man statt Tabelle 2:

Tabelle 3¹⁾.

	1. Übergang	2. Übergang	3. Übergang
A	$p_0^- \rightarrow p_1^+$	$p_1^+ \rightarrow p_2^+$	$p_2^+ \rightarrow p^+$
B	$p_0^- \rightarrow p_1^+$	$p_1^+ \rightarrow p_2^-$	$p_2^- \rightarrow p^+$
C	$p_0^- \rightarrow p_1^-$	$p_1^- \rightarrow p_2^+$	$p_2^+ \rightarrow p^+$
D	$p_0^- \rightarrow p_1^-$	$p_1^- \rightarrow p_2^-$	$p_2^- \rightarrow p^+$

Wie vorhin ist auch der Spin der Zwischenzustände und die Reihenfolge der g_1, g_2, g_3 beliebig. Summe über alle Übergangsmöglichkeiten heißt hier:

$$\left. \begin{aligned} \sum & \text{über die Fälle } A \text{ bis } D \text{ der Tabelle 3,} \\ \sum & \text{über die Spinkoordinaten der Zwischenzustände,} \\ \sum & \text{über die Permutationen der Lichtquanten } (\sum_{\mathfrak{P}}). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Wegen des Verzichtes auf eine genaue Berücksichtigung der Besetzungsregeln ist es notwendig und folgerichtig, in den $V_{ik}^{(1)}$ [siehe (35)] die Vorzeichenfunktionen χ zu streichen. Bildet man mit den so abgeänderten $V_{ik}^{(1)}$ die erste dieser Summen, so entsteht

$$\begin{aligned} & \sum_{A-D} \frac{V_{ik}^{(1)} V_{kl}^{(1)} V_{lm}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} \\ &= \sum_{\lambda, \mu = \pm 1} e^3 \sqrt{\frac{c^3 \hbar^3 \hbar^3}{V^3 g_1 g_2 g_3}} \frac{\{a_0^* | \alpha e_1 | a_1^\lambda\} \{a_1^{\lambda*} | \alpha e_2 | a_2^\mu\} \{a_2^{\mu*} | \alpha e_3 | a\}}{(E_0 + \lambda E_1 - c g_1)(\mu E_2 - E + c g_3)}. \quad (41) \end{aligned}$$

Die rechten Seiten von (39) und (41) sind gleich, und damit führen beide Methoden, alle Übergangsmöglichkeiten zusammenzustellen, zum richtigen Ergebnis für die Übergangswahrscheinlichkeit W .

Die Gleichberechtigung beider Methoden ist hier nur für den speziellen Prozeß 6 gezeigt worden, und es erhebt sich die Frage, für welche anderen

¹⁾ Die Übergänge als Elektronen- oder Positronensprünge, als Paarerzeugungen oder -vernichtungen zu deuten, ist wegen des Verzichtes auf die Paulische Regel nicht mehr möglich.

Prozesse sie noch gilt. Die Antwort, die durch Verifikation bis zu Prozessen fünfter Ordnung bestätigt gefunden wurde, heißt: Wenn man einen Prozeß unter Verzicht auf die Paulische Besetzungsregel für die Zwischenzustände dadurch verwirklichen kann, daß ein *einziges* Elektron durch aufeinanderfolgende Sprünge von einem Anfangszustand zu einem von ihm *verschiedenen* Endzustand gelangt (wie in Tabelle 3), so sind beide Wege zum Auffinden aller Übergangsmöglichkeiten gleichberechtigt. Solche Prozesse sind z. B. die Compton-Streuung oder die Erzeugung oder Vernichtung eines Paares unter Beteiligung beliebig vieler Lichtquanten, dagegen nicht die Streuung von Licht an Licht¹⁾, weil hier Anfangs- und Endzustand nicht verschieden sind, und auch nicht der Prozeß 7 der Einleitung, weil man bei ihm nicht mit einem einzigen Elektron auskommt.

2. *Aufstellung der Wirkungsquerschnitte.* Es soll berechnet werden der Wirkungsquerschnitt $\Phi_1 d g_3 d \omega_3 d \omega$ dafür, daß durch gegenseitigen Stoß zweier Lichtquanten beliebiger Polarisation ein Lichtquant wieder beliebiger Polarisation, dessen Impuls im Intervall g_3 bis $g_3 + d g_3$, $d \omega_3$ liegt, und ein Paar mit beliebigem Spinzustand, dessen Elektron einen zum Winkelbereich $d \omega$ gehörigen Impuls hat, entstehen.

Nach (36), (37) und (39) kennen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Zeiteinheit aus zwei Lichtquanten gegebener Polarisation g_1, e_1 und g_2, e_2 ein Lichtquant g_3 mit bestimmter Polarisationsrichtung e_3 und ein Paar mit definiertem Spinzustand p, E, σ und $-p_0, E_0, \sigma_0$ entstehen in der Form

$$W = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E_m} \frac{e^6 c^3 \hbar^3}{V^3 g_1 g_2 g_3} \left| \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\{a_0^* | \alpha e_1 | a_1^{\lambda}\} \{a_1^{\lambda*} | \alpha e_2 | a_2^{\mu}\} \{a_2^{\mu*} | \alpha e_3 | a\}}{(E_0 + \lambda E_1 - c g_1) (\mu E_2 - E + c g_3)} \right|^2. \quad (42)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus zwei Lichtquanten mit beliebiger Polarisationsrichtung ein drittes mit beliebiger Polarisationsrichtung und ein Paar mit beliebigem Spinzustand entstehen, ist dann (**M** bedeutet Mittelung)

$$W = \frac{2\pi}{\hbar \Delta E_m} \frac{e^6 c^3 \hbar^3}{V^3 g_1 g_2 g_3} \mathbf{M}_{e_1} \mathbf{M}_{e_2} \sum_{e_3} \sum_{\sigma_0} \sum_{\sigma} \left| \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{\sigma_1} \sum_{\sigma_2} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\{a_0^* | \alpha e_1 | a_1^{\lambda}\} \{a_1^{\lambda*} | \alpha e_2 | a_2^{\mu}\} \{a_2^{\mu*} | \alpha e_3 | a\}}{(E_0 + \lambda E_1 - c g_1) (\mu E_2 - E + c g_3)} \right|^2. \quad (43)$$

$1/\Delta E_m$ ist definiert als die Dichte, mit der nach irgendeinem Merkmal ausgewählte Zustände m in der E_m -Skala liegen. Hier müssen wir also die

¹⁾ H. Euler, Ann. d. Phys. **26**, 398, 1936.

Dichte der auf g_3 bis $g_3 + dg_3$, $d\omega_3$, $d\omega$ entfallenden Zustände in der E_m -Skala suchen. Zum Impulsbereich g_3 bis $g_3 + dg_3$, $d\omega_3$ des entstehenden Lichtquants, p bis $p + dp$, $d\omega$ des Elektrons (der Impuls des Positrons ist durch den Impulssatz bestimmt und nicht mehr frei wählbar) gehören $\frac{V^2}{h^6} p^2 dp d\omega g_3^2 dg_3 d\omega_3$ mögliche Zustände. Daraus folgt, daß zu g_3 bis $g_3 + dg_3$, $d\omega_3$ des Lichtquants, $d\omega$ des Elektrons und dE_m

$$\frac{V^2}{h^6} p^2 g_3^2 dg_3 d\omega_3 d\omega \frac{1}{\frac{\partial E_m}{\partial p}} dE_m$$

Zustände gehören. E_m ist hier als Funktion von p und g_3 einzusetzen. Daraus ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{\Delta E_m} = \frac{V^2}{h^6} p^2 g_3^2 dg_3 d\omega_3 d\omega \frac{1}{\frac{\partial E_m}{\partial p}}.$$

Wegen

$$E_m(p, g_3) = c \sqrt{m^2 c^2 + (p + g_3 - g_1 - g_2)^2} + c \sqrt{m^2 c^2 + p^2} + c g_3$$

ist

$$\frac{\partial E_m}{\partial p} = \frac{c^2 p}{E} + \frac{c^2 p p_0}{E_0 p}$$

und

$$W = \frac{2\pi}{h} \frac{e^6 c^3 h^3 \hbar^3}{V^3 g_1 g_2 g_3} \frac{1}{\frac{c^2 p}{E} + \frac{c^2 p p_0}{E_0 p}} \frac{V^2}{h^6} p^2 g_3^2 dg_3 d\omega_3 d\omega$$

$$\cdot \sum_{e_1} \sum_{e_2} \sum_{e_3} \sum_{o_0} \sum_{\sigma} \left| \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{o_1} \sum_{o_2} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\{a_0^* | \alpha e_1 | a_1^\lambda\} \{a_1^{\lambda*} | \alpha e_2 | a_2^\mu\} \{a_2^{\mu*} | \alpha e_3 | a\}^2}{(E_0 + \lambda E_1 - c g_1) (\mu E_2 - E c g_3')} \right|. \quad (44)$$

Um aus W den zugehörigen Wirkungsquerschnitt zu bekommen, muß man so normieren, daß je ein Lichtquant g_1 , e_1 und g_2 , g_2 in 1 sec durch 1 cm^2 gehen, d. h. $V = c$ setzen. Man erhält

$$\Phi_1 dg_3 d\omega_3 d\omega = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{e^2}{h c} \frac{m^2 c^5}{g_1 g_2 g_3} p^2 g_3^2 dg_3 d\omega_3 d\omega \frac{1}{\frac{p}{E} + \frac{p p_0}{E_0 p}} \cdot \sum_{e_1} \sum_{e_2} \sum_{e_3} \sum_{o_0} \sum_{\sigma} \left| \sum_{\lambda=\pm 1} \sum_{\mu=\pm 1} \sum_{o_1} \sum_{o_2} \sum_{\mathfrak{P}} \frac{\{a_0^* | \alpha e_1 | a_1^\lambda\} \{a_1^{\lambda*} | \alpha e_2 | a_2^\mu\} \{a_2^{\mu*} | \alpha e_3 | a\}^2}{(E_0 + \lambda E_1 - c g_1) (\mu E_2 - E + c g_3')} \right|. \quad (45)$$

Die innerhalb und außerhalb des Absolutquadratzeichens stehenden Spin-summationen lassen sich nach schon mehrfach verwendeten Methoden¹⁾ durchführen. Man erhält²⁾:

$$\Phi_1 dg_3 d\omega_3 d\omega = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{m^2 c^5}{g_1 g_2 g_3} p^2 g_3^2 dg_3 d\omega_3 d\omega$$

$$\text{Spur } \mathbf{M}_{e_1} \mathbf{M}_{e_2} \mathbf{M}_{e_3} \left(\sum_{\mathfrak{P}} \frac{(\alpha e_i) \{E_0 - c g_i + c \alpha (p_0 + g_i) + \beta m c^2\} (\alpha e_j) \{-E + c g_k + c \alpha (p - g_k) + \beta m c^2\} (\alpha e_k)}{\{(E_0 - c g_i)^2 - E_{p_0 + g_i}^2\} \{(E - c g_k)^2 - E_{p - g_k}^2\}} \right)$$

$$\left(1 - \frac{c \alpha p + \beta m c^2}{E} \right) \left(\sum_{\mathfrak{P}} \frac{(\alpha e_i) \{E_0 - c g_i + c \alpha (p_0 + g_i) + \beta m c^2\} (\alpha e_j) \{-E + c g_k + c \alpha (p - g_k) + \beta m c^2\} (\alpha e_k)}{\{(E_0 - c g_i)^2 - E_{p_0 + g_i}^2\} \{(E - c g_k)^2 - E_{p - g_k}^2\}} \right)^*$$

$$\left(1 + \frac{c \alpha p_0 + \beta m c^2}{E_0} \right). \quad (46)$$

Aus (46) lassen sich integrale Wirkungsquerschnitte gewinnen, z. B. der Wirkungsquerschnitt $\Phi_2 dg_3$ dafür, daß durch gegenseitigen Stoß zweier Lichtquanten beliebiger Polarisation ein Lichtquant wieder beliebiger Polarisation, dessen Impuls einen Betrag zwischen g_3 und $g_3 + dg_3$ aber beliebige Richtung hat, und ein Paar mit beliebigem Spinzustand und beliebigen Impulsen³⁾ entstehen:

$$\Phi_2 dg_3 = \iint d\omega_3 \iint d\omega \Phi_1 dg_3. \quad (47)$$

Der Wirkungsquerschnitt Φ_3 dafür, daß der Prozeß 6 überhaupt geschieht, ist

$$\Phi_3 = \int \Phi_2 dg_3. \quad (48)$$

Für die Auswertung von (46) ist das geeignetste Koordinatensystem das, in dem der Gesamtimpuls der einfallenden Lichtquanten verschwindet, also

$$g_1 = -g_2 = g \quad \text{und damit} \quad g_1 = g_2 = g$$

gilt. Durch Lorentz-Transformation kann man von diesem zu jedem anderen Koordinatensystem übergehen und damit auch die Wirkungsquerschnitte für beliebige g_1 und g_2 erhalten mit Ausnahme solcher g_1 und g_2 , die gleiche Richtung haben. In diesem Falle aber sind alle Wirkungsquerschnitte gleich Null, weil man Energie- und Impulssatz nicht zugleich befriedigen kann.

¹⁾ Z. B. H. Bethe u. W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 83, 1934; W. Heitler und L. Nordheim, l. c. — ²⁾ \sum_{e_3} wird durch $2 \mathbf{M}_{e_3}$ ersetzt.

$\sum_{\mathfrak{P}}$ = Summe über die sechs Permutationen $i, j, k = 1, 2, 3'$. — ³⁾ Der Sinn von „beliebige Impulse“ ist natürlich eingeschränkt durch Impuls- und Energiesatz: $p_0 + g_1 + g_2 = p + g_3$, $E + E_0 + c g_3 = c g_1 + c g_2$.

Weiter ist für die Berechnung von (46) eine andere Einheitenwahl vorteilhaft:

Alle Impulse sollen von jetzt an in Einheiten mc , alle Energien in Einheiten mc^2 gemessen werden. In (45) und (46) verschwindet dabei der Faktor m^2c^5 und alle m und c in der Spur.

3. Die Spur. Die Spur in (46) enthält zwei Summen über je sechs Permutationen als Faktoren, im ganzen also 36 Summanden. Berechnet man die Spur jedes dieser Summanden für sich, so zerfällt also die Spur in (46) in die Summe von 36 Spuren. Durch die Symmetrietransformationen

I , die Identität,

U , die Umklappung der $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2)$ -Achse,

T , die Vertauschung von Elektron und Positron ($\mathbf{p} \rightleftharpoons -\mathbf{p}_0$, $E \rightleftharpoons E_0$)
und von β mit $-\beta$

kann man die Berechnung von 28 von diesen Spuren auf die der übrigen 8 zurückführen. In Tabelle 4 sind die 36 Spuren gekennzeichnet durch die in ihnen auftretenden Lichtquantenpermutationen.

Für die Spuren I und VII ergibt sich exakt:

$$\begin{aligned} \text{Spur I} = & \frac{1}{E E_0 g^2 g_3^2 (E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g}))^2 (E - p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g}_3))^2} \\ & \cdot [\{(E + g_3)(E^2 - p^2 \cos^2(\mathbf{p} \mathbf{g}_3)) + g_3^2(E - p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g}_3)) - E - g_3\} \\ & \cdot \{(E_0 - g)(E_0^2 - p_0^2 \cos^2(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) + g^2(E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) - E_0 + g\} \\ & - \{-p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g})(-g_3(E - p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g}_3)) - (E^2 - p^2 \cos^2(\mathbf{p} \mathbf{g}_3)) + 1) \\ & + g_3 \cos(\mathbf{g}_3 \mathbf{g})((E + g_3)(E - p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g}_3)) - 1)\} \\ & \cdot \{-p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})(-g(E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) + (E_0^2 - p_0^2 \cos^2(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) - 1) \\ & - g((E_0 - g)(E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) - 1)\} \\ & + \{E^2 - p^2 \cos^2(\mathbf{p} \mathbf{g}_3) - 1\} \cdot \{E_0^2 - p_0^2 \cos^2(\mathbf{p}_0 \mathbf{g}) - 1\}]. \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \text{Spur VII} = & \frac{1}{E E_0 g^4 (E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g}))^2 (E + p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g}))^2} \\ & \cdot [\{(E - g)(E^2 - p^2 \cos^2(\mathbf{p} \mathbf{g})) + g^2(E + p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g})) - E + g\} \\ & \cdot \{(E_0 - g)(E_0^2 - p_0^2 \cos^2(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) + g^2(E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) - E_0 + g\} \\ & - \{p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g}_3)(g(E + p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g})) - (E^2 - p^2 \cos^2(\mathbf{p} \mathbf{g})) + 1) \\ & - g \cos(\mathbf{g} \mathbf{g}_3)((E - g)(E + p \cos(\mathbf{p} \mathbf{g})) - 1)\} \\ & \cdot \{p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g}_3)(-g(E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) + (E_0^2 - p_0^2 \cos^2(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) - 1) \\ & + g \cos(\mathbf{g} \mathbf{g}_3)((E_0 - g)(E_0 + p_0 \cos(\mathbf{p}_0 \mathbf{g})) - 1)\} \\ & + \{E^2 - p^2 \cos^2(\mathbf{p} \mathbf{g}) - 1\} \{E_0^2 - p_0^2 \cos^2(\mathbf{p}_0 \mathbf{g}) - 1\}]. \end{aligned} \quad (50)$$

Die anderen Spuren wurden nur für gewisse Näherungsfälle berechnet (vgl. § 3, 4 bis 6).

4. Die Wirkungsquerschnitte bei kleinem Impuls des entstehenden Lichtquants. In den Summanden, die nach (42) und Tabelle 4 die Wirkungsquerschnitte zusammensetzen, kann g_3 bis dreimal im Nenner auftreten, einmal in $1/g_1 g_2 g_3$ und zweimal im Nenner der Spuren (vgl. (49)). Im Zähler tritt es nach (42) nur zweimal auf. So entsteht die Frage, ob die Wirkungsquerschnitte für kleine g_3 divergieren. Zur Beantwortung dieser Frage muß das erste Glied der Entwicklung nach g_3 ausgerechnet werden. Mit Fehlern der Größenordnung g_3/p ist

$$\begin{aligned} p_0 &= p & (\text{Impulssatz}), \\ E_0 &= E = g_1 = g_2 = g & (\text{Energiesatz}). \end{aligned} \quad (51)$$

Geht man damit in die g_3^2 im Nenner enthaltenden Spuren I, II, V und VI ein, bildet nach Tabelle 4 die zugehörigen Transformationen, so erhält man für die Wirkungsquerschnitte

$$\Phi_1 d\omega_3 d\omega dg_3 = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{e^2}{hc} \frac{p}{g} \frac{dg_3}{g_3} d\omega_3 d\omega \cdot \frac{\sin^2(p g_3) \{p^2 g^4 - p^6 \cos^4(p g) + 2p^4 - 2p^4 \cos^2(p g)\}}{(g^2 - p^2 \cos^2(p g_3))^2 (g^2 - p^2 \cos^2(p g))^2}. \quad (52)$$

$$\Phi_2 dg_3 = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{e^2}{hc} \frac{dg_3}{g_3} \frac{1}{g^6} \cdot \left[\frac{4p^6 + 14p^4 + 12p^2 + 3}{gp} \log^2 \frac{g+p}{g-p} - (8p^4 + 22p^2 + 10) \log \frac{g+p}{g-p} + 4gp(p^2 + 2) \right]. \quad (53)$$

Über die also wirklich auftretende Proportionalität zu dg_3/g_3 vgl. S. 155.

5. Die Wirkungsquerschnitte bei beliebigem Impuls des entstehenden Lichtquants. Die im vorigen Abschnitt berechneten Wirkungsquerschnitte gelten für beliebige Größenordnung des Impulses g der einfallenden Lichtquanten, dagegen nur für solche Impulse g_3 des entstehenden Lichtquants, die klein gegen $p = \sqrt{g^2 - 1}$ sind. In diesem Abschnitt soll Φ_2 für solche g_3 berechnet werden, die die gleiche Größenordnung wie g haben. Dabei soll aber vorausgesetzt werden, daß

$$g \gg 1; \quad g_3 \gg 1; \quad g - g_3 \gg 1 \quad (54)$$

ist. Aus Energie- und Impulssatz folgt dann, daß auch

$$p \gg 1; \quad p_0 \gg 1 \quad (55)$$

Zu berechnen		Durch		
		<i>I</i>	<i>U</i>	<i>IU</i>
I	(1 2 3) (1 2 3)*	—	(2 1 3) (2 1 3)*	—
II	(1 2 3) (2 1 3)* ¹⁾	(2 1 3) (1 2 3)*	—	—
III	(1 2 3) (1 3 2)*	(1 3 2) (1 2 3)*	(2 1 3) (2 3 1)*	(2 3 1) (2 1 3)*
IV	(1 2 3) (2 3 1)*	(2 3 1) (1 2 3)*	(2 1 3) (1 3 2)*	(1 3 2) (2 1 3)*
V	(1 2 3) (3 1 2)*	(3 1 2) (1 2 3)*	(2 1 3) (3 2 1)*	(3 2 1) (2 1 3)*
VI	(1 2 3) (3 2 1)*	(3 2 1) (1 2 3)*	(2 1 3) (3 1 2)*	(3 1 2) (2 1 3)*
VII	(1 3 2) (1 3 2)*	—	(2 3 1) (2 3 1)*	—
VIII	(1 3 2) (2 3 1)*	(2 3 1) (1 3 2)*	—	—

ist. Vernachlässigt werden soll 1 gegen die Logarithmen von g , g_3 , $g - g_3$, p und p_0 . Die Rechnung beruht auf einer Eigenschaft der in den Nennern der Spuren auftretenden Faktoren

$$\left. \begin{aligned} (E - g_k)^2 - E_{p-g_k}^2 &= -2 g_k (E - p \cos(p g_k)), \\ (E_0 - g_i)^2 - E_{p_0-g_i}^2 &= -2 g_i (E_0 + p_0 \cos(p_0 g_i)). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Diese Ausdrücke werden, wenn (55) gilt, für $\cos(p g_k) = 1$ und $\cos(p_0 g_i) = -1$ fast gleich Null. Φ_1 ist an diesen Stellen fast singular. In einer ersten Näherung muß es also genügen, die bei der Bildung von Φ_2 auftretende Winkelintegration nur über die Nachbarschaft dieser Stellen zu erstrecken. Es sind also die Spuren zu entwickeln nach

$$\frac{1}{g}, \frac{1}{g_3}, \frac{1}{g - g_3} \text{ usw.}$$

und zugleich nach den Sinussen der Winkel zwischen den Impulsen. Dabei stellt sich heraus, daß nur die Spuren I und VII und ihre nach Tabelle 4 gebildeten Transformationen zu berücksichtigen sind. Das Ergebnis ist

$$\Phi_2 d g_3 = 8 \left(\frac{e^2}{m c^2} \right) \frac{e^2 g^2 + 2(g - g_3)^2 + g_3^2}{h c g^4} \log g \log(g - g_3) \frac{d g_3}{g_3}. \quad (57)$$

Die Spuren II bis VI und VIII geben höchstens Ausdrücke der gleichen Art mit nur einem Logarithmus. Bildet man unter den gleichen Vernachlässigungen Φ_3 , indem man von $g_3 = \sim 1$ bis $g_3 = \sim g$ integriert, so kommt

$$\Phi_3 = 24 \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{e^2}{h c} \frac{1}{g^3} \log^3 g. \quad (58)$$

Dabei ist also der von kleinen g_3 stammende Anteil von $\Phi_3 = \int \Phi_2 d g_3$ einfach weggelassen worden (vgl. S. 156).

¹⁾ D. h. aus der ersten $\sum_{\mathfrak{P}}$ soll der Summand ausgewählt werden, in dem $g_i = g_1$, $g_j = g_2$, $g_k = g'_3$ ist, aus der zweiten $\sum_{\mathfrak{P}}$ der Summand, in dem $g_i = g_2$, $g_j = g_1$, $g_k = g'_3$ ist.

e 4.

Durchführung zu gewinnen				
IU	T	IT	UT	IUT
—	(3 2 1) (3 2 1)*	—	(3 1 2) (3 1 2)*	—
—	(3 1 2) (3 2 1)*	(3 2 1) (3 1 2)*	—	—
(1) (2 1)	(2 3 1) (3 2 1)*	(3 2 1) (2 3 1)*	(1 3 2) (3 1 2)*	(3 1 2) (1 3 2)*
(2) (2 1)	(1 3 2) (3 2 1)*	(3 2 1) (1 3 2)*	(2 3 1) (3 1 2)*	(3 1 2) (2 3 1)*
(1) (2 1)	—	—	—	—
(2) (2 1)	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

6. Wirkungsquerschnitte bei vorgeschriebenem Elektronenimpuls. Statt wie in § 3, 2 in der Definition der Wirkungsquerschnitte das Lichtquant g_3 kann man auch das entstehende Elektron bevorzugen, also fragen nach dem Wirkungsquerschnitt $\Phi' dp$ dafür, daß durch gegenseitigen Stoß zweier Lichtquanten beliebiger Polarisierung ein Lichtquant wieder beliebiger Polarisierung und ein Paar mit beliebigem Spinzustand, dessen Elektron einen Impuls zwischen p und $p + dp$ hat, entstehen. Für Φ' ergibt sich durch eine § 3, 4 und 5 entsprechende Rechnung

$$\Phi' dp = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{p^2 dp}{g^3} (8 \log(2g) - 3) \quad g \gg 1, \quad p \ll 1.$$

$$\Phi' dp = 4 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \frac{dp}{g-p} \frac{g^2 + 2p^2 + (g-p)^2}{g^4} \log p \log g \quad g, p, g-p \gg 1.$$

§ 4. Bildung zweier Paare aus drei Lichtquanten.

Durch Energie- und Impulssatz nicht verboten ist eine Entstehung von zwei Elektron-Positronpaaren aus drei Lichtquanten. Da der Impuls bereits für jede Einzelabsorption gilt, müssen sich die Impulse eines Paares um einen der drei Lichtquantenimpulse unterscheiden, die des anderen um die Summe aus den Impulsen der beiden anderen Lichtquanten. Nennt man die Positronenimpulse $-p_1$ und $-p_2$, so heißen für eine bestimmte Permutation der Lichtquanten g_1, g_2, g_3 die Paare $(p_1 + g_1 | -p_1)$ und $(p_2 + g_2 + g_3 | -p_2)$. Auf welche Weise diese Paare entstehen können und zugleich das Produkt Π_x der Vorzeichenfunktionen, zeigt die folgende Tabelle, in der wieder die Klammern die den betreffenden Vorgängen gemäß der Löchertheorie entsprechenden Elektronensprünge darstellen.

Tabelle 5.

	1. Übergang	2. Übergang	3. Übergang	
I. ₁	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1$)	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2$)	Elektronensprung ($\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3$)	
I. ₂	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2$)	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1$)	Elektronensprung ($\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3$)	
I. ₃	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2$)	Elektronensprung ($\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3$)	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1$)	
II. ₁	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1$)	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3$)	Positronensprung ($\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2$)	
II. ₂	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_3 + \mathfrak{g}_3$)	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1$)	Positronensprung ($\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2$)	
II. ₃	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2 + \mathfrak{g}_3$)	Positronensprung ($\mathfrak{p}_2 \rightarrow \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{g}_2$)	Paarerzeugung ($\mathfrak{p}_1 \rightarrow \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{g}_1$)	

Die Formeln für Übergangswahrscheinlichkeiten und Wirkungsquerschnitte enthalten nach (36) die Summen

$$\sum_{\text{I}, 1-3} \frac{V_{ik}^{(1)} V_{kl}^{(1)} V_{lm}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)} \quad \text{und} \quad \sum_{\text{II}, 1-3} \frac{V_{ik}^{(1)} V_{kl}^{(1)} V_{lm}^{(1)}}{(E_i - E_k)(E_i - E_l)}.$$

Beide sind gleich Null. Es gibt also keine Entstehung zweier Paare aus drei Lichtquanten als Prozeß dritter Ordnung.

Herrn Prof. Heisenberg möchte ich für Anregung und dauernde Förderung dieser Arbeit herzlich danken.

Leipzig, Institut für theoretische Physik der Universität, den 10. Okt. 1936.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften.)

Über die g -Faktoren der Edelgasterme.

Von **Katalin Lörinczi** in Budapest.

(Eingegangen am 13. Juli 1937.)

Es stellte sich heraus, daß die Diskrepanz zwischen den beobachteten Zeeman-Effekten und der in der Literatur vorkommenden abgeleiteten g -Formel für die $p^5 p$ -Konfiguration einem Rechenfehler zuzuschreiben ist. Nach entsprechender Korrektur wird eine ziemlich gute Übereinstimmung für zahlreiche A-, Kr- und Xe-Terme gefunden.

Wie Terrien und Dijkstra¹⁾ und Pogány²⁾ angaben, stimmen die experimentell festgesetzten g -Werte der Edelgasterme mit denen, die Inglis und Ginsburg³⁾ für die $n p^5 n' p$ -Konfiguration abgeleitet haben, nicht überein. Nachdem durch erneute Beobachtungen die experimentellen Daten gesichert sind, wurde versucht, eine Deutung etwa in den Vernachlässigungen, die in der Ableitung der Formeln begangen wurden, zu finden. Nach erneuter Durchführung der Ableitung der g -Formeln stellte sich aber heraus, daß die Diskrepanz in der Hauptsache einem Rechenfehler zuzuschreiben ist, der die Endformeln von Inglis und Ginsburg entstellt; die Vernachlässigungen spielen dabei eine unbedeutende Rolle. Statt der Formel für g_k (S. 195) von Inglis und Ginsburg

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\gamma - W_k}{\alpha - 4\zeta - W_k} \right)$$

ist

$$g_k = \frac{\sqrt{2}(\gamma - W_k)}{(W_k - \alpha)}$$

zu setzen.

Nach dieser Korrektur wird die Übereinstimmung mit den beobachteten g -Werten viel besser, was sich besonders dann kundgibt, wenn man statt der gemessenen Termwerte die mit Hilfe der sekulären Gleichungen der Energietransformation gerechneten Termwerte zur Ermittlung der Zahlenwerte g_{calc} heranzieht (Tabelle 1). Tabelle 1 enthält die gemessenen und berechneten g -Werte der Konfigurationen $3 p^5 4 p$, $3 p^5 5 p$ für Argon, $4 p^5 5 p$, $4 p^5 6 p$ Krypton und $5 p^5 6 p$ für Xenon.

¹⁾ I. Terrien u. H. Dijkstra, Journ. de Physique (7) **5**, 439, 1934. —

²⁾ B. Pogány, ZS. f. Phys. **86**, 729, 1933; **93**, 364, 1934; Zeemann-Verhandelingen 336, 1935. — ³⁾ D. R. Inglis u. N. Ginsburg, Phys. Rev. **43**, 194, 1933.

Tabelle 1.

Neon I $2p^5 3p$. $a_1 = -403$; $a_2 = 40$; $\alpha = 537$; $\gamma = 946$.

J	W_{beob}	W_{calc}	g_{beob}	g_{calc}
1	1381 cm ⁻¹	1376 cm ⁻¹	1,34	1,402
1	1115	1151	0,999	1,046
1	464	370	0,669	0,627
1	-1399	-1328	1,984	1,907
2	1201	1201	1,301	1,379
2	658	729	1,229	1,154
2	167	128	1,137	1,142

Argon I $3p^5 4p$. $a_1 = -878$; $a_2 = 68$; $\alpha = 471$; $\gamma = 1070$.

J	W_{beob}	W_{calc}	g_{beob}	g_{calc}
1	2033 cm ⁻¹	2030 cm ⁻¹	1,37	1,312
1	1669	1600	0,825	0,888
1	624	626	0,82	0,808
1	-1361	-1305	1,99	1,976
2	1827	1728	1,26	1,294
2	775	908	1,30	1,29
2	154	120	1,11	1,086

Argon I $3p^5 5p$. $a_1 = -977$; $a_2 = 44$; $\alpha = 24$; $\gamma = 454$.

J	W_{beob}	W_{calc}	g_{beob}	g_{calc}
1	1516 cm ⁻¹	1542 cm ⁻¹	1,45	1,392
1	1465	1500	0,61	0,66
1	208	338	1,01	1,091
1	-283	-327	1,90	1,885
2	1526	1550	1,18	1,184
2	241	369	1,42	1,401
2	56	41	1,09	1,086

Krypton I $4p^5 5p$. $a_1 = -3632$; $a_2 = 246$; $\alpha = 200$; $\gamma = 1278$.

J	W_{beob}	W_{calc}	g_{beob}	g_{calc}
1	5624 cm ⁻¹	5661 cm ⁻¹	1,425	1,392
1	5311	5342	0,62	0,708
1	670	828	1,028	1,041
1	-1125	-1032	1,891	1,907
2	5624	5741	1,163	1,194
2	829	1034	1,40	1,396
2	13	188	1,116	1,08

Krypton I $4p^5 6p$. $a_1 = -3567$; $a_2 = 44$; $\alpha = 195$; $\gamma = 208$.

J	W_{beob}	W_{calc}	g_{beob}	g_{calc}
1	5399 cm ⁻¹	5395 cm ⁻¹	1,384	1,448
1	5395	5260	0,635	0,614
1	198	138	1,046	1,084
1	— 229	— 294	1,82	1,812
2	5399	5450	—	1,168
2	247	224	1,406	1,343
2	6	46	1,11	1,156

Xenon I $5p^5 6p$. $a_1 = -7094$; $a_2 = 374$; $\alpha = -24$; $\gamma = 1188$.

J	W_{beob}	W_{calc}	g_{beob}	g_{calc}
1	10 876 cm ⁻¹	10 832 cm ⁻¹	—	1,424
1	9 978	10 378	0,781	0,733
1	553	702	1,009	1,099
1	— 1 134	— 1 288	1,75	1,689
2	10 759	10 759	1,178	1,169
2	809	911	1,381	1,407
2	283	449	1,113	1,096

Über die Berechnung der g -Formeln für die Konfigurationen p^5d , ferner über die Zeeman-Effekte von Edelgaslinien, wo diese Konfigurationen eine Rolle spielen, wird demnächst berichtet.

Vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Königl. Ungarischen Universität für technische und Wirtschaftswissenschaften, das einen Teil seiner Ausrüstung dem Naturwissenschaftlichen Forschungsfonds und der Széchenyi-Gesellschaft verdankt und unter Leitung des Herrn Prof. B. Pogány steht, ausgeführt. Ich möchte für die Anregung zu dieser Arbeit dem Herrn Privatdozenten R. Schmid auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

Zur Frage der Spannungsabhängigkeit des Zündverzugs.

Von **Werner Braunbek** in Tübingen.

(Eingegangen am 9. August 1937.)

Ein scheinbarer Widerspruch zwischen den Ergebnissen einer früher von mir und neuerdings auf anderem Wege von G. Hertz durchgeführten Berechnung der Zündwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Elektrodenspannung wird aufgeklärt.

Vor einer Reihe von Jahren habe ich¹⁾ auf Grund der Townsend'schen Theorie mittels Wahrscheinlichkeitsüberlegungen für die einzelnen Ionisierungsspiele eine Formel für die Abhängigkeit der Zündwahrscheinlichkeit p (bei Hertz $1 - Q$) von dem „mittleren Vervielfältigungsfaktor“ f (bei Hertz μ), der seinerseits in bekannter Weise von der Elektrodenspannung abhängt, aufgestellt. Das Ergebnis wurde in Form einer unendlichen Reihe:

$$p = 1 - e^{-f} - f e^{-2f} - \frac{3}{2} f^2 e^{-3f} - \frac{8}{3} f^3 e^{-4f} - \frac{125}{24} f^4 e^{-5f} - \dots \quad (1)$$

erhalten, für deren Koeffizienten ich zwei verschiedene Arten von Bildungsgesetzen angeben konnte.

Kürzlich hat nun Hertz²⁾ dasselbe Problem auf einem etwas anderen Wege gelöst, wobei er, von denselben Voraussetzungen wie ich ausgehend, für p eine transzendente Gleichung (die sich nach f sogar auflösen läßt, und dadurch eine große Vereinfachung darstellt) erhält, und zwar:

$$1 - p = e^{-pf}. \quad (2)$$

Die von mir nach (1) und von Hertz nach (2) gezeichneten Kurven stimmen nun wohl für große f asymptotisch überein, nicht aber in der Nähe von $f = 1$, wo die Hertz'sche Kurve die Anfangsneigung 2, meine aber nur die Anfangsneigung 1 aufweist. Hertz weist auf diese ungeklärte Diskrepanz hin.

Es läßt sich nun zunächst leicht zeigen, daß die Reihe (1) eine Lösung der Gleichung (2) darstellt. Setzt man nämlich $1 - p = Q$, so wird aus (1):

$$Q = e^{-f} [1 + (f e^{-f}) + \frac{3}{2} (f e^{-f})^2 + \dots] \quad (3)$$

und aus (2):

$$Q = e^{-f} e^{fQ} = e^{-f} [1 + (fQ) + \frac{1}{2} (fQ)^2 + \dots]. \quad (4)$$

¹⁾ W. Braunbek, ZS. f. Phys. **39**, 6, 1926. — ²⁾ G. Hertz, ebenda **106**, 102, 1937.

Setzt man auf der rechten Seite von (4) für Q den Ausdruck (3) ein, so kommt gerade die rechte Seite von (3) heraus.

Die Lösung von Hertz und meine Lösung sind also trotz der verschiedenen Form mathematisch *identisch*; eine Diskrepanz zwischen ihnen besteht *nicht*.

Dagegen ist mir seinerzeit bei der Berechnung der Anfangssteigung (für $f = 1$) der Reihe (1), und damit auch bei der Zeichnung der Kurve, die sich wesentlich auf diese Anfangssteigung gründete, ein Fehler unterlaufen. Es ist nämlich zu beachten, daß der Punkt $f = 1$ ein singulärer Punkt der Gesamtkurve (die ja von $f = 0$ an geht) ist, an dem die Steigung der Kurve von Null (links von $f = 1$) auf einen endlichen Wert (rechts von $f = 1$) *springt*. Der von mir formal erhaltene Wert 1 für die Steigung stellt das *Mittel* aus diesen beiden Werten dar, so daß die für den ansteigenden Ast der Kurve ($f > 1$) geltende Anfangssteigung den Wert 2 erhält, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Hertz.

An den Folgerungen, die ich in meiner damaligen Arbeit zog, ändert sich dadurch kaum etwas. Es entfällt nur die Näherungsfunktion p^* , die jetzt keine gute Näherung mehr darstellt, und in die Formeln für die mittlere Verzögerung der Zündung [z. B. Formel (18)] tritt ein Faktor $1/2$, was aber angesichts der sowieso schlechten quantitativen Übereinstimmung dieser Formel mit den gemessenen Werten kaum von Bedeutung ist.

Tübingen, 6. August 1937.

Stark-Effekt an Magnesiumlinien *).

Von Herbert Eckarth.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. August 1937.)

Mit Hilfe einer Methode, die auf der Zerstäubung der Magnesiumbacken des Kondensators durch Wasserstoff-Kanalstrahlen beruht, gelang es, den Stark-Effekt an Magnesium bis zu einer Feldstärke von 690 kV/cm zu beobachten. Mehrere Glieder der diffusen und scharfen Nebenserien im Triplettssystem, sowie die Mg II-Linie λ 4481 wurden durch das elektrische Feld beeinflusst. Die Polarisation der meisten Stark-Effekt-komponenten ließ sich mit einem Wollastonprisma ermitteln. Die Existenzgrenzen von Anregungszuständen in starken elektrischen Feldern konnten an einzelnen Gliedern der diffusen Singulett- und Triplett-Nebenserien festgestellt werden.

Nach Entdeckung der Aufspaltung der Wasserstofflinien im elektrischen Feld hat Stark¹⁾ verschiedene Metalle in der Weise untersucht, daß er die Elektrode in der Anordnung zur Beobachtung des *Quereffektes* aus dem zu untersuchenden Metall herstellte. Beobachtet wurde das Leuchten der ruhenden Intensität des durch die Kanalstrahlen des Füllgases (H, He) zerstäubten und angeregten Elektrodenmaterials. Ein Nachteil der Methode des Quereffektes beruht darauf, daß zur Erzeugung hoher Feldstärken der Abstand der Hilfselektrode von der Kathode ziemlich gering gemacht werden muß, so daß die Länge der Spektrallinien zu klein wird.

Eine allgemeine Schwierigkeit für die Untersuchung des Stark-Effektes an Metalllinien nach der *Kanalstrahlmethode* liegt weiterhin in der Herstellung lichtstarker Metallkanalstrahlen.

Bei der Anordnung von Lo Surdo wird durch den Kanalstrahl des Füllgases das zu untersuchende Kathodenmaterial ebenfalls zerstäubt. Nachteilig wirkt hier, daß sich das zerstäubte Metall an der Glaswand vor der Kathode niederschlägt, wodurch einerseits eine Lichtschwächung eintritt und andererseits der Kathodenfall nach einer bestimmten Zeit nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Durch die Zerstäubung entsteht weiter eine Vertiefung in der Kathode, die eine Verschiebung des Anfangs der Kathodenschicht und damit Veränderung der Feldstärke bewirkt. Die Lo Surdo-Methode wurde von Anderson²⁾ und Takamine³⁾, sowie Takamine und Kokubu⁴⁾ auf verschiedene Metalle angewandt. Die Anregung

*) Dissertation der Philosophischen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.

¹⁾ J. Stark, Ann. d. Phys. **43**, 1017, 1914. — ²⁾ I. A. Anderson, Astrophys. Journ. **46**, 104, 1917. — ³⁾ T. Takamine, ebenda **50**, 23, 1919. — ⁴⁾ T. Takamine u. N. Kokubu, Mem. of the College of Sc. Kyoto Univ. **3**, 178, 1918.

des Kathodenmaterials ließ sich noch dadurch begünstigen, daß man zu dem Wasserstoffgas im Kanalstrahlrohr etwas Luft, Sauerstoff oder ein anderes Fremdgas gab.

In *Absorption* wurde der Stark-Effekt der Natrium D-Linien und anderer Hauptserienglieder von Alkalien durch Ladenburg¹⁾ und dann durch Grotrian und Ramsauer²⁾ und Grotrian³⁾ untersucht. Die Anwendbarkeit dieser Methode ist jedoch im wesentlichen auf die Alkalien beschränkt.

Da insbesondere für astrophysikalische Fragen eine genauere Kenntnis der Metall-Stark-Effekte wichtig ist, so soll in der folgenden Arbeit eine Methode beschrieben werden, mit der es gelang, den Effekt an Magnesium bei genügender Lichtstärke bis zu Feldstärken von mehreren 100 kV/cm zu beobachten.

I. Apparatur. Das benutzte Kanalstrahlrohr bestand aus einer Duranglas-Kugelhöhre mit der strahlungsgeköhlten Anode aus einem breiten Molybdänblechstreifen und der wassergeköhlten Kathode mit der Feldanordnung nach Rausch v. Traubenberg und Gebauer⁴⁾. Die Betriebsspannung am Rohre (20 bis 25 kV) lieferte eine Stabilvoltanlage.

Da die Beanspruchung des Kondensators durch Erwärmung sehr groß war und auf dessen Magnesiumbacken nicht unbeträchtliche elektrostatische Kräfte wirkten, so wurden sie auf Distanz durch vier verstellbare Quarzstäbe gesichert. Die Feldbacken waren keilförmig, so daß der Kanalstrahl nacheinander verschiedene Feldstärken durchlief. Um auf einer Aufnahme für alle Linien mehrere Stellen gleicher Feldstärke erkennbar zu machen, waren dünne Drähte über den Spalt des Spektrographen gespannt.

Zur einwandfreien Messung der Linienverschiebungen und -aufspaltungen wurde vor oder nach dem Exponieren auf die belichtete Platte — dem Magnesiumspektrum überlagert — das Spektrum des Eisenbogens aufgenommen. Der gleichzeitig mit aufgenommene Stark-Effekt von H_β und H_γ diente zur genauen Bestimmung der Größe des Feldes.

Die höchste Feldstärke von 690 kV/cm ließ sich erzielen, wenn der Abstand der beiden Kondensatorbacken an der engsten Stelle etwa 0,3 bis 0,4 mm betrug und die Anregung nicht zu intensiv war. In diesem Falle war die eine Feldelektrode aus Nickel, die andere aus Elektron, einer Magnesiumlegierung, hergestellt. Mit der schwächeren Anregung ließen sich dabei allerdings nur noch die intensivsten Linien beobachten.

¹⁾ R. Ladenburg, Phys. ZS. **22**, 549, 1921. — ²⁾ W. Grotrian u. G. Ramsauer, ebenda **28**, 846, 1927. — ³⁾ W. Grotrian, ZS. f. Phys. **49**, 541, 1928. — ⁴⁾ H. Rausch v. Traubenberg u. R. Gebauer, Naturwissensch. **18**, 132, 1930.

Tabelle 1. Verschiebung in cm^{-1} , Polaris

Diffuse N. S. Glied	λ	Kombination	Komp.	Intensität bei 300 kV/cm
				Singulett
II	5528	$3^1P_1 - 4^1D_2$	π	2
III	4703	$3^1P_1 - 5^1D_2$	π	2
IV	4352	$3^1P_1 - 6^1D_2$	π	1
Scharfe N. S.				Triplett
I. Glied	5183	$3^3P_2 - 4^3S_1$	$\pi \sigma$	6
	5172	$3^3P_1 - 4^3S_1$	$\pi \sigma$	5
	5167	$3^3P_0 - 4^3S_1$	$\pi \sigma$	4
II. Glied	3336	$3^3P_2 - 5^3S_1$	$\pi \sigma$	3
	3332	$3^3P_1 - 5^3S_1$	$\pi \sigma$	2
	3329	$3^3P_0 - 5^3S_1$	$\pi \sigma$	1
Diffuse N. S.				
I. Glied	3338	$3^3P_2 - 3^3D$	σ	6
			π	6
			σ	6
	3832	$3^3P_1 - 3^3D$	σ	5
			π	6
			σ	4
	3829	$3^3P_0 - 3^3D$	σ	3
			π	4
Intensität bei 170 kV/cm				
II. Glied	3096	$3^3P_2 - 4^3D$	σ	4
			$\pi \sigma$	4
	3093	$3^3P_1 - 4^3D$	$\pi \sigma$	5
	3091	$3^3P_0 - 4^3D$	π	4
Intensität bei 350 kV/cm				
„Verbotener“ Übergang				
	3854,5	$3^3P_2 - 4^3P_1$	—	2
	3854,1	$3^3P_2 - 4^3P_2$	π	6
	3848,7	$3^3P_1 - 4^3P_1$	π	5
	3848,0	$3^3P_1 - 4^3P_2$	—	1
	3844,9	$3^3P_0 - 4^3P_1$	π	3
Intensität bei 170 kV/cm				
{	3087,3	$3^3P_1 - 5^3P$	—	1
Mg II				
	4481	$3^2D_{3/2} - 4^2F_{7/2, 5/2}$	—	—

sation und Intensität der Mg-Linien.

Verschiebung in cm^{-1} bei Feldstärke in kV/cm						
100	150	200	250	300	350	690
system						
— 1,3	— 2,8	— 5,0	— 7,6	— 10,7	— 13,7	
— 4,3	— 9,6	— 17	— 26	— 33,6		
— 11,3	— 25,5	— 45,5	— 69,8			
system						
						— 2,3
						— 2,3
					— 12,6	
					— 11,7	
					— 12,6	
					— 1,4	
+ 1,8	+ 4,1	+ 7,3	+ 11,5	+ 16,5	+ 21,3	
+ 2,5	+ 5,7	+ 10,0	+ 15,5	+ 22,2	+ 28,8	
					— 1,4	
+ 1,6	+ 3,7	+ 6,7	+ 10,5	+ 15,0	+ 19,3	
+ 2,4	+ 5,4	+ 9,6	+ 15,1	+ 21,3	+ 27,3	
			— 1,8			
+ 2,1	+ 4,5	+ 7,6	+ 11,3	+ 15,7	+ 20,8	
60	80	100	120	140	160	170
— 5,8	— 10,3	— 1,5	— 23,7	— 32,1	— 41,0	— 4,2
		— 16,3				— 45,6
		— 1,4				— 3,7
— 6,8	— 12,0	— 18,3	— 24,3	— 29,3	— 33,6	— 35,5
+ 5,3	+ 9,0	+ 13,1	+ 17,8	+ 22,9	+ 28,2	+ 30,8
100	150	200	250	300	350	
— 4,9	— 9,7	— 15,0	— 20,7	— 26,7	— 33,2	
— 2,7	— 5,8	— 10,0	— 14,7	— 20,0	— 25,6	
— 3,4	— 7,1	— 11,7	— 17,1	— 22,9	— 29,0	
— 2,3	— 5,0	— 9,2	— 14,3	— 20,6		
— 7,0	— 13,8	— 20,0	— 25,3	— 31,0	— 36,8	
60	80	100	120	140	160	170
		+ 18			+ 38	+ 45
				330		
				— 1,7		

Ein Meyer-Trioplan bildete den Kanalstrahl auf den Spalt des Spektrographen ab. Für das Gebiet 5600 bis 3800 Å wurde ein Steinheil G-H-Spektrograph mit drei Glasprismen und langer Brennweite ($f = 64$ cm) benutzt, der bei 5600 Å eine Dispersion von 28 Å/mm, bei 3800 Å 5,3 Å/mm gab. Weiter kam der größeren Dispersion wegen für dieses Intervall ein im Institut gebauter Dreiprismenapparat mit 16 Å/mm bei λ 5528 bzw. 5,5 Å/mm bei λ 4352 zur Verwendung. Für die Untersuchung im Ultraviolett mußte das Glasfenster am Rohr durch Quarz ersetzt werden. Eine einfache Quarzlinse ($f = 14$ cm) bildete dann den Kondensator auf den Spalt eines Steinheil G-H-Quarzspektrographen ab (zwei 60°-Prismen, Brennweite $f = 72,5$ cm; Dispersion 12 Å/mm bei λ 3100).

In den einzelnen Spektralbereichen wurden für die Aufnahmen von der Agfa hergestellte Spezialplatten benutzt. Für das sichtbare rote Spektrum kam die Platte „Spektral rotgelb hart“, für den grünen Teil des Spektrums „Spektral grünrapid“ und für das blauviolette Gebiet die „Platte für Sternlichtaufnahmen“ zur Anwendung. Für das ultraviolette Spektrum 3000 bis 3500 Å erwies sich die „Agfa Normal“-Platte als ausreichend empfindlich.

Die Polarisation der einzelnen Stark-Effektkomponenten konnte mit einem vor dem Spalt des Spektrographen angebrachten Wollaston-Prisma festgestellt werden.

II. Verschiebungen und Aufspaltungen im Magnesiumspektrum. Vom Spektrum des Magnesiums wurden die im Termschema Fig. 1¹⁾ wiedergegebenen Linien untersucht. In der vorstehenden Tabelle 1 sind nicht alle gemessenen Verschiebungen wiedergegeben, sondern die Frequenzänderungen in cm^{-1} sind für die angegebenen Feldstärken nach graphischer Ausgleichung aus den Fig. 2, 3 und 4 abgelesen. In den graphischen Darstellungen ist als Abszisse die Feldstärke bzw. das Quadrat der Feldstärke in kV/cm aufgetragen, als Ordinate die Verschiebung in cm^{-1} , wobei der Anfangspunkt der Kurven willkürlich gewählt wurde.

Die Intensitätsangaben sind ein ungefähres Maß für die Schwärzung einer Komponente auf dem Spektrogramm. Mit der Intensität 1 ist eine eben wahrnehmbare Linie bezeichnet; Intensität 6 ist die größte vorkommende Schwärzung. Aus den Kurven für die *diffuse Singulettnebenserie* Fig. 2 [vgl. auch Takamine und Kokubu²⁾], die zwei Glieder dieser Serie bis 74 kV/cm untersucht haben], läßt sich ersehen, daß die Linien bis zu

¹⁾ Nach W. Grotrian, Graph. Darstellung d. Spektren von Atomen u. Ionen mit 1, 2 und 3 Val. Elektronen. Berlin 1928. — ²⁾ T. Takamine u. N. Kokubu, Mem. of the College of Sc. Kyoto Univ. **3**, 178, 1918.

einer Feldstärke von ungefähr 250 kV/cm eine rein quadratische Rotverschiebung zeigen. Erst bei höheren Feldern treten Abweichungen von dieser Gesetzmäßigkeit auf.

Im Triplettssystem ergab die Beobachtung des ersten Gliedes der scharfen Nebenserie nur geringe Rotverschiebungen. Bis zu einer Feldstärke von 300 kV/cm war keine merkliche Verschiebung festzustellen. Bei 690 kV/cm

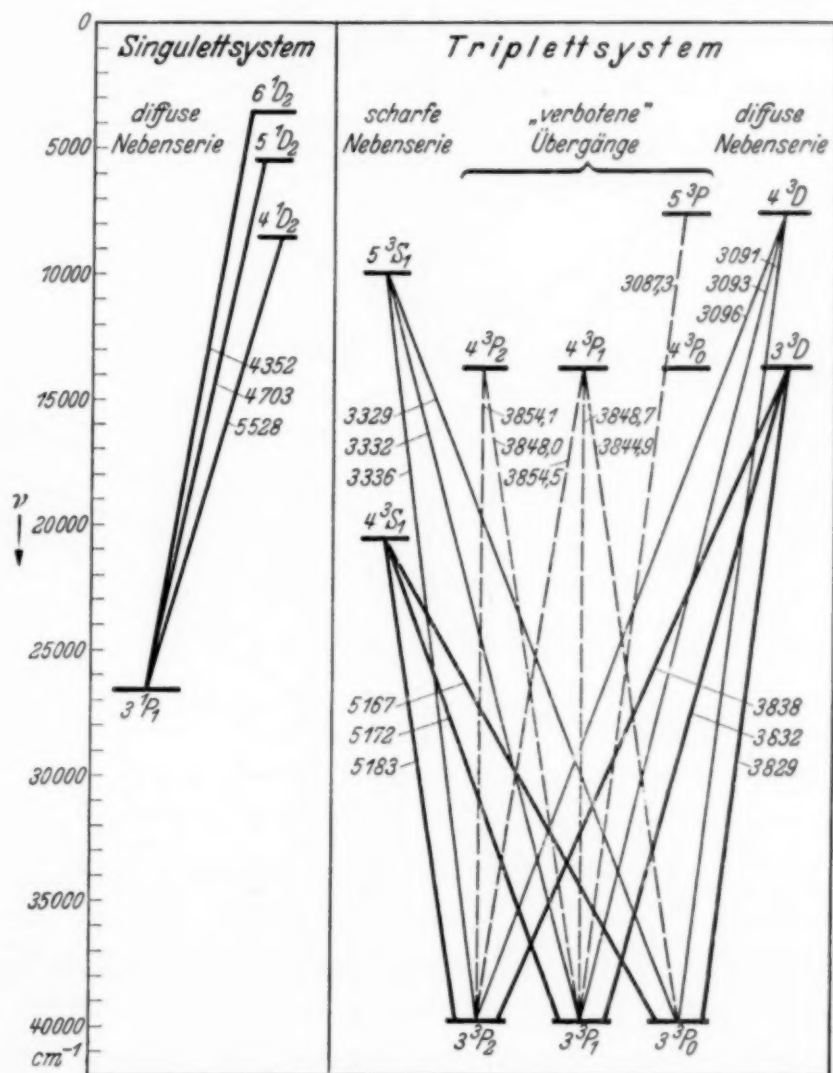


Fig. 1. Termschema des Mg I-Spektrums nach Grotrian.

wurden die Linien λ 5183 und λ 5172 um $2,3 \text{ cm}^{-1}$ nach Rot verschoben. Die Linie λ 5167 war schlecht zu beobachten, da sie mit einer Fe-Linie zusammenfiel.

Das zweite Glied der scharfen Nebenserie zeigt schon bei 350 kV/cm eine etwa zehnmal größere Rotverschiebung als das erste Glied bei derselben Feldstärke.

Im ersten Triplet der *diffusen Nebenserie* (Fig. 3) spalten die Linien $\lambda 3838$ und $\lambda 3832$ bei den angewandten Feldstärken in drei Komponenten auf, von denen zwei eine größere Violettverschiebung zeigen, die dritte dagegen eine geringere Rotverschiebung. Bei der Linie $\lambda 3829$ war nur eine zweifache Aufspaltung zu erkennen, wieder eine größere nach Violett und eine geringere nach Rot. Takamine¹⁾ gibt für alle drei Linien eine zweifache Aufspaltung nach Violett an.

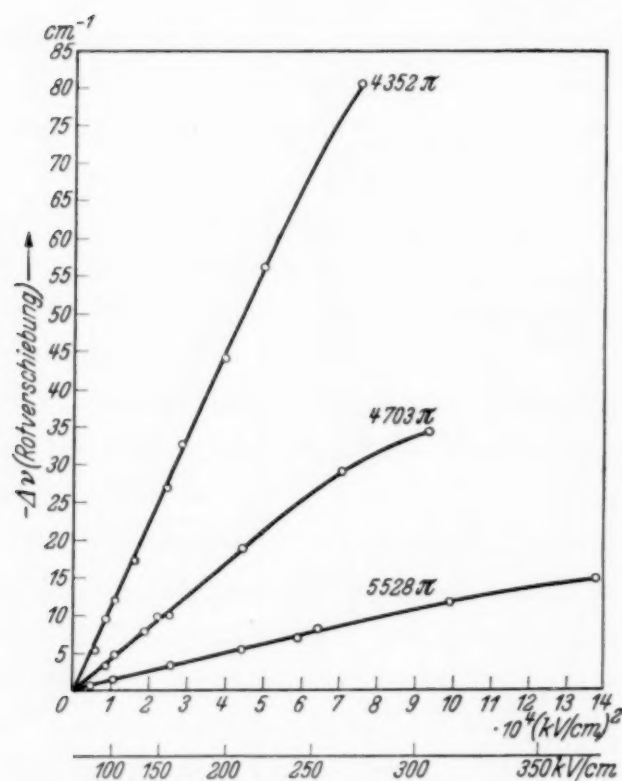


Fig. 2. Verschiebung in cm^{-1} für die diffuse Singulettnebenserie.

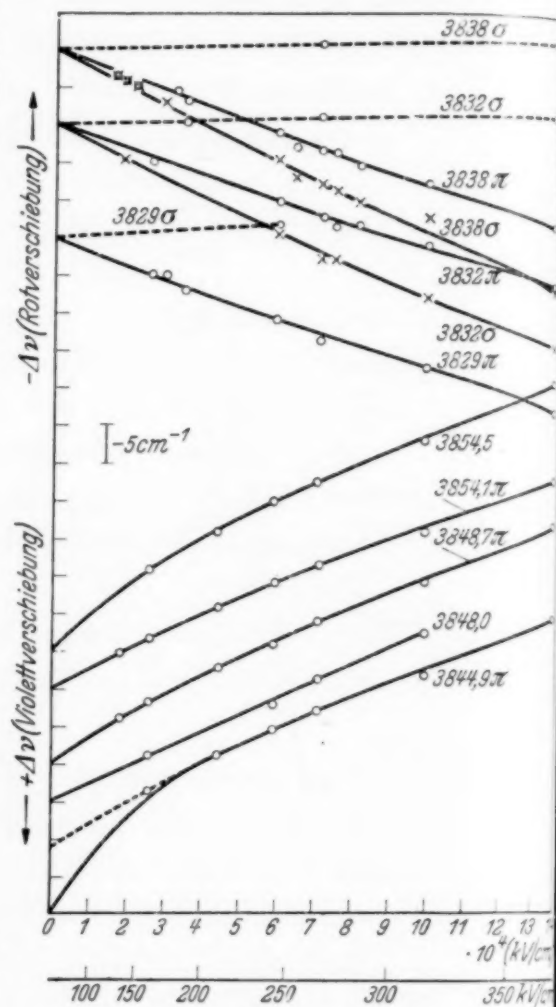


Fig. 3. Verschiebung in cm^{-1} für das I. Glied der diffuse Tripletnebenserie und die „verbotenen“ Übergänge.

Bei der Untersuchung des zweiten Triplets der *diffusen Nebenserie* (Fig. 4), das zum Teil schon von Takamine und Kokubu (l. c.) beobachtet ist, möchte man nach der üblichen Erfahrung eine größere, aber ähnliche Aufspaltung erwarten. Das Experiment dagegen ergab, daß die beiden langwelligen Linien in je zwei rotverschobene Komponenten aufspalteten, während die kurzwellige Linie nur eine Verschiebung nach Violett zeigt. Die Größe der Aufspaltung bei 180 kV/cm beträgt das Fünf- bis Sechsfache von der des ersten Gliedes bei derselben Feldstärke.

¹⁾ T. Takamine, *Astrophys. Journ.* **50**, 23, 1919.

Auf der langwelligen Seite des violetten Triplets stellten sich bei Einwirkung elektrischer Felder auf den Kanalstrahl fünf „verbotene“ Linien ein, deren Intensität im feldfreien Raum gleich 0 ist. Erst bei Anlegen eines genügend hohen Feldes erhalten die verschobenen Linien eine merkliche Intensität. Bei 350 kV/cm steht sie der des violetten Triplets kaum mehr nach (Fig. 5). Sämtliche fünf „verbotenen“ Linien werden nach der roten Seite des Spektrums verschoben, wobei nur die Linie $\lambda 3848,09$ eine rein quadratische Verschiebung zeigt. Für die Linie $\lambda 3844,97$ scheint die von Paschen angegebene Wellenlänge zu klein zu sein. Durch Extrapolation

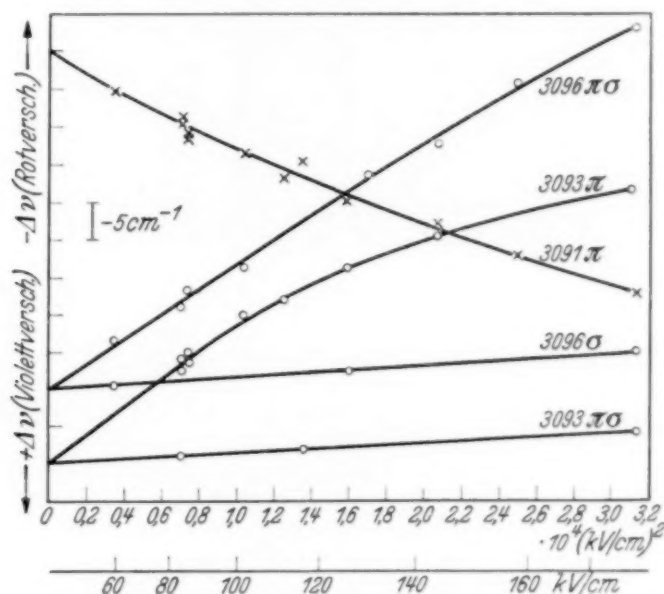


Fig. 4. Verschiebung in cm^{-1} für das II. Glied der diffusen Triplettnebenserie.

auf Feldstärke 0 erhält man aus dem Kurvenbild (Fig. 3) $\lambda 3846,2$. Ähnlich wie bei den von Stark gefundenen „verbotenen“ He-Linien begünstigt das elektrische Feld hier die Übergänge mit $\Delta l = 0$, welche der Auswahlregel für die Azimutalquantenzahl ($\Delta l = \pm 1$) widersprechen.

Beim ultravioletten Triplett konnte der geringeren Intensität wegen nur eine „verbotene“ Linie gefunden werden. Da diese Linie sehr lichtschwach war und sich nur für einige Feldstärken die Violettsverschiebungen ermitteln ließen, wurde auf eine graphische Darstellung verzichtet. Die Wellenlänge der Linie ergab sich durch Extrapolation für das Feld 0 und rechnerisch aus den Termdifferenzen nach Grotrian (l. c.) zu $\lambda 3087,3$.

Die Mg II-Linie $\lambda 4481$ erschien nur dann genügend lichtstark, wenn die Spannung am Kondensator in der Nähe der Durchschlagsgrenze lag. Auf einem Teil der Aufnahmen wurde bei höheren Feldstärken eine Rot-

verschiebung festgestellt, bei anderen Aufnahmen dagegen trat nur die unverschobene Linie auf. Im ersten Falle ließ sich trotz des Funkenüber

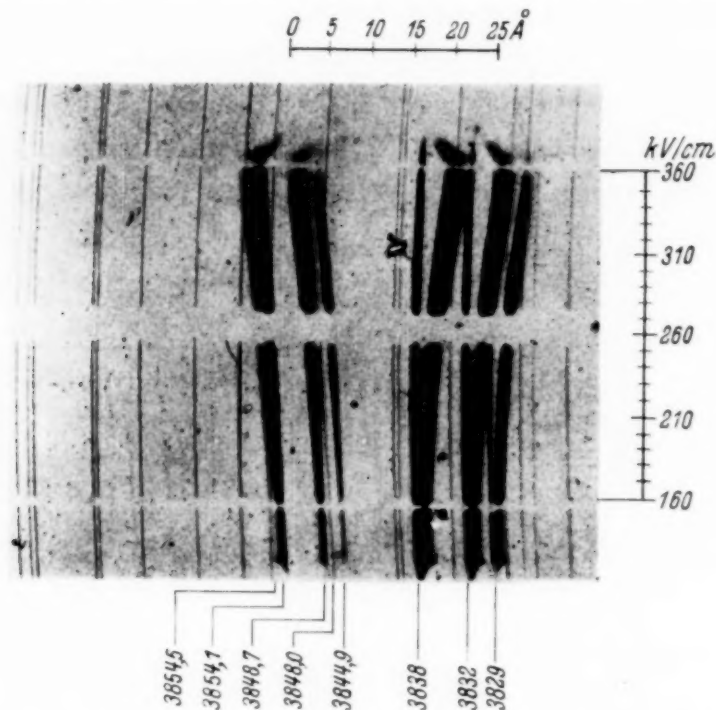


Fig. 5. „Verbotene“ Linien und erstes Glied der diffusen Mg-Triplettnebenserie (lineare Vergrößerung 1:5).

Die ausgewerteten Aufnahmen, auf denen deutlich eine Aufspaltung der Linien λ 3838 und λ 3832 in drei scharfe Komponenten zu erkennen ist, sind leider nicht zur Wiedergabe geeignet.

gangs im Kondensator das Feld noch aufrecht erhalten, im zweiten brach bei Funkenübergang das Feld ganz zusammen und man erhielt die unbeeinflusste Mg II-Linie.

III. *Existenzgrenzen für die diffusen Nebenserien des Magnesiumspektrums in starken elektrischen Feldern.* Wie schon erwähnt, gewinnen manche Spektrallinien mit Zunahme des elektrischen Feldes erheblich an Intensität. Umgekehrt ist das Feld aber auch imstande, bestimmte Linien zu schwächen.

An der *diffusen Singulettnebenserie* war zu beobachten, daß die Linien immer nur bis zu einer charakteristischen Feldstärke sichtbar blieben. Es konnten verfolgt werden:

λ 5528 bis 371 kV/cm,

λ 4703 bis 315 kV/cm,

λ 4352 bis 275 kV/cm.

Obwohl noch höhere Feldstärken vorhanden waren und die Belichtungszeit bis zu 4 Stunden gesteigert wurde, konnten die Linien doch nicht weiter

beobachtet werden. Es bestehen also für die Mg-Linien, ähnlich wie beim Wasserstoff¹⁾, Existenzgrenzen, deren Größe mit wachsender Gliednummer der Linien sinkt.

Dieselbe Erscheinung trat auch bei den Linien der *diffusen Triplettenbenserie* auf. Auch hier wurde die höhere Gliednummer der Serie früher als die vorhergehende ausgelöscht. Das erste Glied war bis 370 kV/cm, das zweite bis 180 kV/cm zu erkennen. Erwähnt muß noch werden, daß gerade an Stellen höchster Feldstärke die Anregung im Kondensator die günstigste war, also die Intensität nicht etwa infolge zu schwacher Anregung abnahm.

Meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. H. Frhr. Rausch v. Trautenberg und Herrn Prof. A. Unsöld danke ich für die Unterstützung und Förderung der Arbeit, desgleichen Herrn Dr. R. Gebauer für wertvolle Ratschläge. Die Arbeit wurde ermöglicht durch Mittel, die die Deutsche Forschungsgemeinschaft in dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt hat.

Institut für Experimentalphysik Universität Kiel, im April 1937.

¹⁾ H. Rausch v. Trautenberg, R. Gebauer u. G. Lewin, Naturwiss. **19**, 417, 1930.

(Mitteilung Serie II, Nr. 2 aus dem Laboratorium für Telegraphie und Telephonie, Königliche Technische Hochschule, Kopenhagen. Direktor: Prof. Dr. P. O. Pedersen.)

Eine Methode zur Verbesserung der Nullpunktstabilität von mehrstufigen Gegentakt-Gleichstromverstärkern.

Von J. Oskar Nielsen.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Juli 1937.)

Die theoretischen Grundlagen eines früher beschriebenen, mehrstufigen Gegentakt Gleichstromverstärkers werden abgeleitet. Die gute Nullpunktstabilität wurde durch Einführung einer besonderen Form von negativer Rückkopplung erreicht.

Das wichtigste und schwierigste Problem bei der Konstruktion eines Gleichstromverstärkers mit hohem Verstärkungsgrad ist die Erreichung einer befriedigenden Nullpunkt Konstanz. Die entscheidende Ursache für die Nullpunktverschiebungen sind meist unvermeidbare, langsame Schwankungen in den Batteriespannungen des Verstärkers. Bekanntlich gibt es eine Reihe von Schaltungen, durch die die Wirkung dieser Spannungsschwankungen bedeutend vermindert werden kann. Die Arbeiten über Gleichstromverstärkung mit Elektronenröhren (vgl. z. B. die Literaturangaben in der A. T. M.) beschäftigen sich hauptsächlich mit der Beschreibung und Untersuchung derartiger Schaltungen.

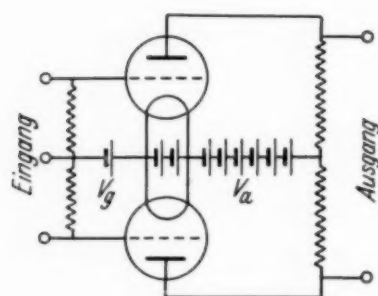


Fig. 1. Gegentaktverstärker.

Eine brauchbare Lösung des Problems der Nullpunktstabilität wurde von Wynn-Williams (1927) und Brentano (1931) angegeben, die zwei Elektronenröhren in einer ausgeglichenen Gegentaktschaltung benutzen, wie es in Fig. 1 dargestellt ist. Die Batteriespannungsschwankungen wirken hier in gleicher Weise auf beide Röhren, so daß die Ausgangsspannung, die von der Differenz der Anodenströme der beiden Röhren abhängt, von den Spannungsvariationen unbeeinflusst bleibt.

Das Prinzip der Gegentaktschaltung wurde auch in mehrstufigen Gleichstromverstärkern [Garceau und Forbes (1934), Krawinkel (1934)] verwendet; durch die größere Empfindlichkeit sind die Ansprüche an eine Nullpunkt Konstanz naturgemäß schwieriger zu erfüllen. In Fig. 2

ist das Schaltschema für einen dreistufigen Gegentaktverstärker dargestellt, den man sich aus zwei übereinstimmenden, in Gegentakt gekoppelten (nicht ausgeglichenen) Verstärkern mit gemeinsamen Batterien zusammengesetzt denken kann.

In dieser Anordnung würde z. B. eine geringe Änderung der Gittervorspannung V_{g1} die Spannung an den Ausgangsklemmen nicht beeinflussen, da sie gleichartige Änderungen in den Anodenströmen der Ausgangsröhren hervorruft und dadurch nur eine Verschiebung des Arbeitspunktes

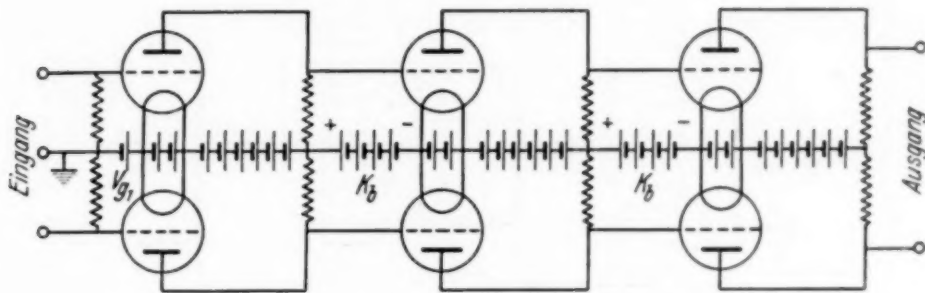


Fig. 2. Dreistufiger Gegentakt-Gleichstromverstärker, batteriegekoppelt.

für beide Röhren bedingt. Als Folge hoher Verstärkung kann diese Verschiebung des Arbeitspunktes auf der Röhrencharakteristik aber leicht so groß werden, daß die Endstufe des Verstärkers überhaupt nicht wirken kann, indem nämlich entweder der Anodenstrom Null wird, oder die Gitter der Ausgangsröhren ein positives Potential bekommen, so daß ein großer Gitterstrom auftritt.

Trotz vollständiger Abgleichung jeder einzelnen Gegentaktstufe (*Querkompensation*) kann dann eine kleine Änderung der Batteriespannung den Verstärker durch mangelhafte „*Längskompensation*“ außer Betrieb setzen. Da eine Querkompensation in einer Gegentaktstufe nur für einen kleinen Gitterspannungsbereich erhalten werden kann, bedingt eine ungenügende Längskompensation weiterhin noch, daß die Nullpunktveränderung durch die Schwankung der Gittervorspannung der ersten Stufe größer werden kann, als es nur einer ungenügenden Querkompensation dieser Stufe entsprechen würde.

Eine vollständige Längskompensation kann für einen mehrstufigen Gegentakt-Gleichstromverstärker mit der in einer früheren Arbeit beschriebenen (Buchthal und Nielsen, 1936) und in Fig. 3 dargestellten Kopplungsmethode erhalten werden. Hierbei wird die Kopplungsbatterie (Kb in Fig. 2) unnötig, und die Übereinstimmung zwischen dem Anodenruhepotential der ersten Stufe und dem Kathodenpotential der folgenden

Stufe, die eine notwendige Voraussetzung für eine direkte Verbindung der Anode der ersten Stufe mit dem Gitter der folgenden Stufe ist, erhält man dadurch, daß die ganze zweite Stufe auf dem Anodenpotential der vorhergehenden Stufe „schwebt“. Die Vorspannung für das Gitter der zweiten Stufe wird von der Batterie V_g über den Gitterableitungswiderstand R_g geliefert. Durch diese Anordnung wird erreicht, daß nur die Differenzen der Anodenspannungsänderungen der ersten Stufe zur zweiten Stufe überführt werden können, während die durch Spannungsänderungen

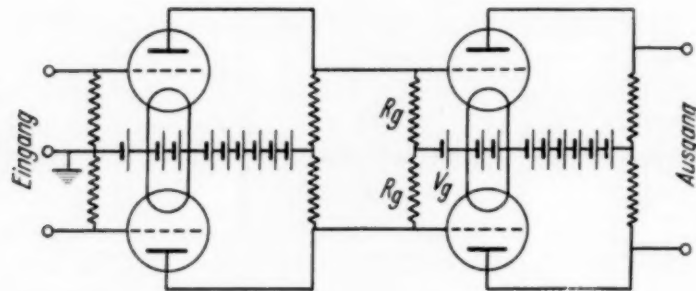


Fig. 3. Zweistufiger Gegentakt-Gleichstromverstärker mit schwebender Stufe.

in den Stromquellen verursachten gleichphasigen Spannungsänderungen nur eine Änderung des Schwebepotentials der zweiten Stufe bedingen und keine Verschiebung der Gittervorspannung der zweiten Stufe veranlassen, die allein durch die Batterie V_g bestimmt wird.

Diese Kopplungsmethode (schwebende Stufe) kann natürlich auch auf mehr als zwei Stufen Anwendung finden. In der Praxis wurden aber Schwierigkeiten bei Anwendung von mehr als drei Stufen beobachtet. Dies gilt besonders, wenn als Registrierinstrument ein Kathodenstrahloszillograph mit Wechselstrom-Netzanschlußgerät benutzt wird, wo eine genügende Isolation gegen Erde schwierig zu erreichen ist.

Dieser Mangel wurde durch die in Fig. 4 gezeigte Änderung des Schaltschemas beseitigt. Die Anodenbatterien der ersten und der dritten Stufe wurden hier direkt durch eine zwischen der Kathode der dritten Stufe und dem Äquipotentialpunkt der Anodenbatterie der ersten Stufe eingefügte Verbindung gekoppelt. Hierdurch wird die letzte Stufe und das mit ihr verbundene Ausgangsinstrument wechselstrommäßig durch den geringen inneren Widerstand der Batterien mit Erde verbunden.

Im praktischen Gebrauch hat sich diese Kopplungsanordnung als vollkommen stabil erwiesen und besitzt, wie es im folgenden abgeleitet werden soll, eine fast vollkommene Längsstabilität. Außerdem ist die Ausgangsspannung immer symmetrisch gegen Erde, selbst wenn die Eingangs-

spannung nur der einen Röhre der ersten Stufe zugeführt wird, so wie es bei einseitig geerdeten Meßobjekten der Fall ist. Dieses Verhalten ist bei Anwendung von Hochvakuum-Kathodenstrahloszillographen zur Registrierung von Wichtigkeit. Weiterhin soll gezeigt werden, daß die Einstellung der Spannungsabnahme von der Anodenbatterie der ersten Stufe

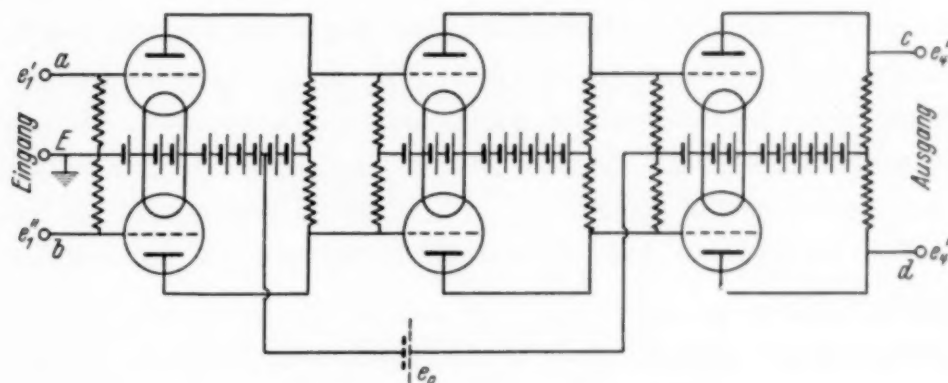


Fig. 4. Schaltbild des neuen Verstärkers.

nicht kritischer ist, als daß sie mit einer Anodenbatterie, deren Spannung in Sprüngen von 1,5 Volt oder mehr variiert (ohne Anwendung eines Potentiometers), vorgenommen werden kann.

Zur Analyse des neuen Verstärkers (Fig. 4) nehmen wir an, daß die beiden Gitter der Eingangsrohren jeweils die Potentialänderungen e'_1, e''_1

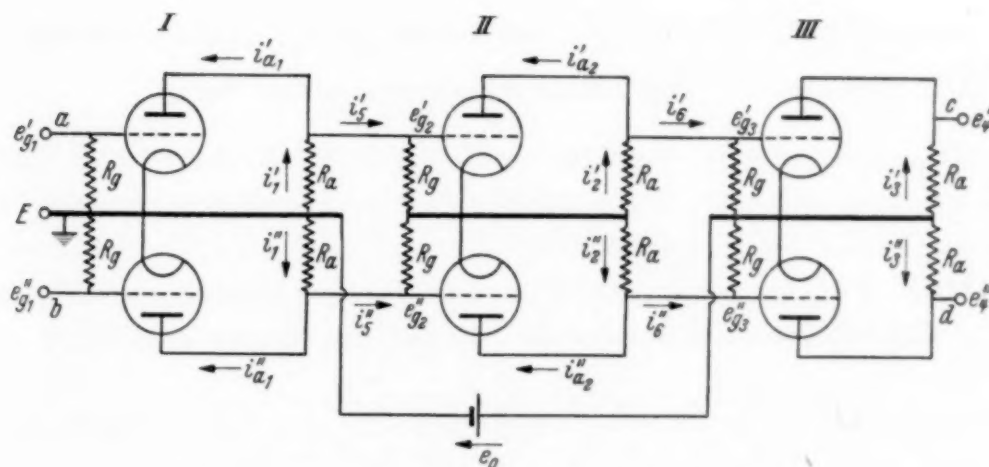


Fig. 5. Vereinfachtes Schaltbild des neuen Verstärkers.

bekommen, die teils aus der Spannung des Meßobjektes, teils aus Schwankungen der negativen Gittervorspannung herrühren können. Um festzustellen, ob die Einstellung des Spannungsabgriffs von der Anodenbatterie der ersten Stufe kritisch ist, wird außerdem in der Verbindungsleitung eine variable elektromotorische Kraft e_0 angenommen, wie es durch die

gestrichelt gezeichnete Batterie angedeutet ist. Unter der Voraussetzung, daß die Charakteristiken der Röhren im vorliegenden Falle als geradlinig angesehen werden können, sollen dann die Potentialänderungen e'_4 und e''_4 , die an den Anoden der Ausgangsröhren (dritte Stufe) auftreten, bestimmt werden.

Da wir nur an den Änderungen der Anodenströme und Gitterpotentiale interessiert sind, kann das Stromschema der Fig. 4 mit dem entsprechenden Diagramm der Fig. 5 ersetzt werden. Die eingezeichneten Strom- und Spannungswerte bezeichnen also Variationen der konstanten Ruhegrößen. Es sei angenommen, daß die drei Stufen gleichartig aufgebaut sind; der Verstärkungsfaktor der Röhren ist μ , der innere Widerstand im Arbeitspunkt R_i , die äußeren Anodenwiderstände R_a und die Gitterableitungswiderstände R_g .

Daraus lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

$$i'_{a1} = \frac{1}{R_i} (\mu \cdot e'_{g1} - i'_1 \cdot R_a). \quad (1)$$

Gleichung (1) ist die Kirchhoffsche Gleichung für den Anodenkreislauf in der Röhre 1. Entsprechende Gleichungen lassen sich für die übrigen fünf Röhren aufstellen, (2) bis (6).

Weiterhin gilt allgemein:

$$e'_{g2} = R_g \cdot i'_5. \quad (7)$$

Die entsprechenden Gleichungen gelten für e'_{g2} , e'_{g3} und e'_{g4} , (8) bis (10).

Die gesuchten Anodenspannungsänderungen sind durch

$$e'_4 = -R_a \cdot i'_3 \quad (11)$$

und

$$e''_4 = -R_a \cdot i''_3 \quad (12)$$

gegeben.

Außerdem lassen sich folgende Kreislaufgleichungen aufstellen:

$$i'_1 R_a + i'_5 R_g - i''_5 R_g - i''_1 R_a = 0, \quad (13)$$

$$i'_2 R_a + i'_6 R_g - i''_6 R_g - i''_2 R_a = 0, \quad (14)$$

$$i'_1 R_a + i'_5 R_g + i'_2 R_a + i'_6 R_g = e_0, \quad (15)$$

$$i''_1 R_a + i''_5 R_g + i''_2 R_a + i''_6 R_g = e_0. \quad (16)$$

Weiterhin besteht die Knotenpunktsgleichung:

$$i'_1 = i'_{a1} + i'_5. \quad (17)$$

und die analogen für i''_1 , i'_2 und i''_2 , (18) bis (20).

Hierdurch sind im ganzen 20 Gleichungen zur Bestimmung der 20 unbekannten Größen aufgestellt. Allerdings sind die Gleichungen (13) bis (16) nicht unabhängig voneinander, da z. B. (16) aus den drei anderen ableitbar ist. Die fehlende Gleichung erhält man aber leicht dadurch, daß die zweite Stufe als ein Knotenpunkt betrachtet werden kann, woraus folgende Gleichung folgt:

$$i'_5 + i''_5 = i'_6 + i''_6. \quad (21)$$

Zunächst soll dieses Gleichungssystem für folgende Sonderfälle gelöst werden:

α) *Gegenphasige, symmetrische Spannungseinwirkung:*

$$e_0 = 0, \quad e'_{g1} = -e''_{g1} = e_a.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß wegen der vollkommenen Symmetrie der Anordnung in diesem Falle alle Größen mit einzelner Strichbezeichnung numerisch gleich den entsprechenden mit doppelter Strichbezeichnung werden, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben. Das Gleichungssystem wird hierdurch wesentlich vereinfacht und die Lösung ist

$$e'_4 = -e''_4 = m^3 \cdot e_a. \quad (a)$$

wobei $m = \mu \cdot \frac{R_a}{R_i + R_a}$ der Spannungsverstärkung pro Stufe ist, indem die praktisch immer zutreffende Annäherung $R_g \gg R_a$ benutzt wird.

β) *Gleichphasige, symmetrische Spannungseinwirkung:*

$$e_0 = 0, \quad e'_{g1} = e''_{g1} = e_s.$$

Wegen der Symmetrie werden hier die einander entsprechenden Größen mit einzelner und doppelter Strichmarke gleich groß mit gleichem Vorzeichen. Das reduzierte Gleichungssystem läßt sich auch hier ohne Schwierigkeiten lösen, und die Lösung wird unter Voraussetzung $m \gg 1, R_g \gg R_a$:

$$e'_4 = e''_4 = m \cdot e_s. \quad (b)$$

γ) *Eingangsspannung = 0, Variation des Spannungsabgriffes um e_0 Volt:*

$$e_0 = e_0, \quad e'_{g1} = e''_{g1} = 0.$$

Auch in diesem Falle werden die einander entsprechenden Größen mit einzelner und doppelter Strichbezeichnung gleich groß mit gleichem Vorzeichen. Die Lösung des so vereinfachten Gleichungssystems wird unter Verwendung der früher angeführten Annäherungen:

$$e'_4 = e''_4 = -e_0. \quad (c)$$

δ) Die Lösung für die übliche Form der Spannungseinwirkung:

$$e'_{g1} = e_1, \quad e''_{g1} = 0 \quad (e_0 = 0)$$

läßt sich leicht folgendermaßen finden:

Diesen Fall kann man sich durch Superposition der beiden Spannungseinwirkungen:

$$e'_{g1} = \frac{1}{2} e_1, \quad e''_{g1} = -\frac{1}{2} e_1 \quad (\alpha)$$

und

$$e'_{g1} = \frac{1}{2} e_1, \quad e''_{g1} = \frac{1}{2} e_1 \quad (\beta)$$

zusammengesetzt denken.

Da sämtliche Gleichungen linear sind, kann die Lösung durch Superposition der α und β entsprechenden Lösungen gefunden werden. Hierdurch erhält man folgende Ausgangsspannungen:

$$e'_4 = \frac{1}{2} (m^3 + m) e_1, \quad e''_4 = \frac{1}{2} (-m^3 + m) e_1.$$

Da $m \gg 1$, kann die Lösung in guter Annäherung folgendermaßen geschrieben werden:

$$e'_4 = -e''_4 = \frac{1}{2} m^3 \cdot e_1. \quad (d)$$

Auf Grund der hierdurch gegebenen Lösung für die Gleichungen des Verstärkers kann die Wirkungsweise des Verstärkers unter verschiedenen Bedingungen erörtert werden.

Aus den Lösungen (a) und (d) ist ersichtlich, daß die Ausgangsspannungen zwischen den Klemmen c und d gegen Erde (Klemme E) immer symmetrisch sind. Dies gilt sowohl in dem Falle, in dem die Eingangsspannung selbst symmetrisch gegen Erde ist, d. h. wenn das Meßobjekt an die Klemmen a und b angeschlossen ist, als auch in den Fällen, in denen das Meßobjekt unsymmetrisch angeschlossen ist, d. h. der eine Pol ist mit Erde verbunden, z. B. bei Anschluß an die Klemmen a und E . Die erhaltene Spannungsverstärkung ist in beiden Fällen m^3 , d. h. die normale Verstärkung bei einem dreistufigen Verstärker mit einer m -maligen Verstärkung pro Stufe.

Die Variation der Anodenpotentiale der Ausgangsröhre, die eine kleine Änderung der Gittervorspannung der ersten Stufe auslöst, ist durch den Fall β bestimmt. Aus der Lösung (b) geht hervor, daß die resultierende, gleichphasige Anodenspannungsänderung an der Ausgangsröhre, d. h. die Arbeitspunktverschiebungen, die gleiche ist, wie sie bei einem einstufigen Verstärker auftreten würde. Auf diesem Verhalten beruht in der Hauptsache die ausgezeichnete Stabilität des neuen Verstärkers. Die vom Meßobjekt stammenden, *gegenphasigen* Eingangsgitterspannungsvariationen werden von allen drei Stufen auf normale Art verstärkt, während

die von den Gittervorspannungsschwankungen verursachten oder von Störspannungen herrührenden *gleichphasigen* Spannungen nur von der letzten Stufe verstärkt werden.

Diese charakteristische Eigenschaft des neuen Verstärkers kann auch als eine negative Rückkopplung erklärt werden, die durch die Verbindung der ersten und dritten Stufe entsteht, und die eine erhebliche Verminderung der Verstärkung für die gleichphasigen Komponenten der Spannungsänderungen an den Gittern der ersten Stufe bewirkt, wohingegen die Verstärkung der gegenphasigen Komponenten nicht beeinflußt wird¹⁾.

Der bei γ behandelte Fall zeigt die Richtigkeit der Behauptung, daß die Einstellung des Spannungsabgriffes von der Anodenbatterie der ersten Stufe nicht kritisch ist. Es folgt aus der Lösung (c), daß eine Variation e_0 des Spannungsabgriffes eine gleichphasige Anodenpotentialänderung von gleicher Größe an den Ausgangsröhren auslöst, was einer m -fach geringeren Verschiebung des Arbeitspunktes auf der Gitterkennlinie entspricht.

Literaturverzeichnis.

Allgemeine Übersicht. Siehe Arch. f. techn. Messen J 8330, Blatt T 123, 124. — J. Brentano, ZS. f. Phys. **54**, 571, 1929. — F. Buchthal u. J. Oskar Nielsen, Skand. Arch. f. Physiol. **74**, 202, 1936. — E. L. Garceau u. A. Forbes, Rev. Scientif. Instr. **5**, 10, 1934. — G. Krawinkel, Fernsehen und Tonfilm **5**, 37, 1934. — F. Offner, Rev. Scientif. Instr. **8**, 20, 1937. — Wynn-Williams, Proc. Cambr. Phil. Soc. **23**, 810, 1927.

¹⁾ In einer neuerdings erschienenen Mitteilung berichtet F. Offner (1937) über die Anwendung der von uns beschriebenen, nur für gleichphasige Spannungsvariationen wirksamen, negativen Rückkopplung in Zusammenhang mit widerstand-kapazitätsgekoppelten Verstärkern [vgl. Buchthal-Nielsen (1936), S. 211].

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Erlangen.)

Becquerel-Effekt an Bleiglanz.

Von Fr. Fischer, B. Gudden und M. Treu.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 7. August 1937.)

Verschiedene Vorkommen von Bleiglanz liefern bei Belichtung mit Wechsellicht in einem Elektrolyten ohne Fremd-EMK. lichtelektrische Ströme.

Unter den vielen Verbindungen, die in einem Elektrolyten bei Belichtung ihr Potential ändern (Becquerel-Effekt) ist PbS bisher nicht aufgeführt worden [vgl. etwa¹⁾]. Bei Versuchen, die wir in anderem Zusammenhang durchführten, beobachteten wir jedoch an mineralischem Bleiglanz unter gewissen Bedingungen erhebliche Wirkungen in der Becquerelschen Anordnung und berichten im folgenden über unsere Feststellungen.

1. *Beobachtungsverfahren.* Belichtete Elektrode (PbS) und unbelichtete (Pb) waren mit dem Eingang eines Niederfrequenzbandverstärkers verbunden. Belichtet wurde mit Wechsellicht, dessen Wechselzahl mit

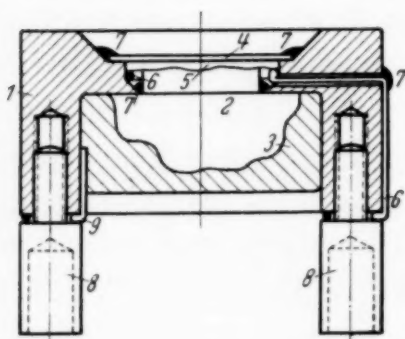


Fig. 1. Bleiglanzzelle.

1 Außenkörper aus isolierendem Preßstoff; 2 Bleiglanzprobe mit ebener Oberfläche; 3 Woodmetall als Halterung des PbS; 4 Deckglas; 5 Elektrolyt, verdünnte H_2SO_4 ; 6 Bleiring als Gegenelektrode; 7 Kittungen; 8 Anschlußbuchsen; 9 Verbindungsdraht.

Lochscheibe zwischen 30 und 10000 Hertz verändert werden konnte; meist wurde unzerlegtes weißes Licht, in Einzelfällen auch monochromatisches Licht verwendet. Bei Vorversuchen wurde die Mineralprobe in einen handelsüblichen Detektorhalter geklemmt, ein Tropfen Elektrolytlösung aufgebracht und die Detektornadel (meist Stahl) in diesen Tropfen getaucht, ohne das Mineral zu berühren. Für die eigentlichen Messungen wurden die Mineralstücke in Zellen eingebaut (vgl. Fig. 1), die dann auf einem Kreuzschlittenreiter befestigt in einem waagerechten Lichtbündel nach allen Richtungen verschoben werden konnten.

2. *Einfluß des Elektrolyten, einer Polarisation und des Ausgangsmaterials.*

Als Elektrolyt wurden Lösungen von Na_2S , Na_2SO_3 , Na_2SO_4 , $NaCl$ und

¹⁾ R. Audubert, *Actualités scientifiques et industrielles* **91**, 1934: „Phénomènes photoélectrochimiques. Action de la Lumière sur le potentiel Métal-Solution.“

H_2SO_4 benutzt; hinsichtlich der Größe des Becquerel-Effektes war die Wirkung nicht sehr verschieden (vgl. jedoch weiter unten); unbefriedigend war die zeitliche Konstanz: innerhalb von Stunden, bisweilen schon innerhalb von Minuten, konnte die lichtelektrische Wirkung bis um eine Größenordnung ab-, unter Umständen auch zunehmen. Da an solchen Zellen auch nach längerem Kurzschluß noch Gleichspannungen bis zu 15 mV bestanden, handelt es sich vermutlich um elektrochemische Umsetzungen. Recht konstant waren Zellen mit 10%iger H_2SO_4 ; sie hielten sich zum Teil viele Tage lang unverändert und wurden daher für die quantitativen Messungen ausschließlich verwendet.

Nur beiläufig wurde versucht, durch „Polarisieren“ die Effekte zu verbessern. Beobachtung bei angelegter Vorspannung glückte nicht, da der Störpegel für Verstärkermessungen dann zu hoch lag. Wir beschränkten uns darauf, den Einfluß kurzfristigen Anlegens einer Spannung bis zu 2 Volt zu beobachten: war der Kristall einige Sekunden lang Anode, so war der Effekt danach erhöht, hatte die Spannung minutenlang angelegen, so war der Effekt verringert; in beiden Fällen stellte sich der ursprüngliche Zustand in einigen Minuten wieder her; war der PbS-Kristall dagegen Kathode, so war der Effekt schon nach sekundenlanger Polarisation endgültig zerstört.

Bemerkenswert ist, daß jede Fläche überall ziemlich gleiche Empfindlichkeit hatte. Wurde ein Lichtpunkt über die meist 1 cm^2 große Fläche hin und her verschoben, so schwankten die Effekte selten stärker als im Verhältnis 1 : 2.

Die Größe der erreichten Effekte war dagegen je nach Ausgangsmaterial sehr verschieden:

Ausgangsmaterial	Am Verstärker beobachtete „Becquerel-Effekte“ in willkürlichen Einheiten
Sardinischer Bleiglanz:	
Frische Bruchfläche	8 . . . 70
Geschmirgelte Fläche	3 . . . 6
Bleiglanz von Salchendorf und Przibram . .	0,01
Verschiedene sonstige Bleiglanzvorkommen; synthetisches, aus dem Schmelzfluß gewonnenes Bleisulfid; umgeschmolzener sardinischer Bleiglanz	nicht meßbar ($<0,001$)

Mit Na_2S -Lösung als Elektrolyt zeigten dagegen *alle* Arten von PbS, mineralisch und künstlich, einen meßbaren Effekt, aber auch schon Blei

allein: zwei Bleiblechstreifen in Na_2S -Lösung zeigen bei Belichtung eines von beiden den Effekt 0,03 (bei Verwendung derselben Einheiten wie oben). Wird eine Spannung von 2 Volt angelegt, so überzieht sich die Anode mit einer dünnen dunkelbraunen Schicht, vermutlich PbS , und der Effekt steigt bis auf 0,2 . . . 1. Wir konnten weder die Dicke der Schicht, noch den Effekt weiter steigern. Wird die Na_2S -Lösung dann durch H_2SO_4 ersetzt, so ist der Effekt zunächst noch genau so vorhanden, klingt aber dann ab. Mit Blei bzw. Bleilegierungen, die stundenlang bei etwa 200°C der Einwirkung von Schwefelwasserstoff ausgesetzt und ebenfalls braun angelauten waren, wurde dagegen in H_2SO_4 merkwürdigerweise kein Effekt beobachtet.

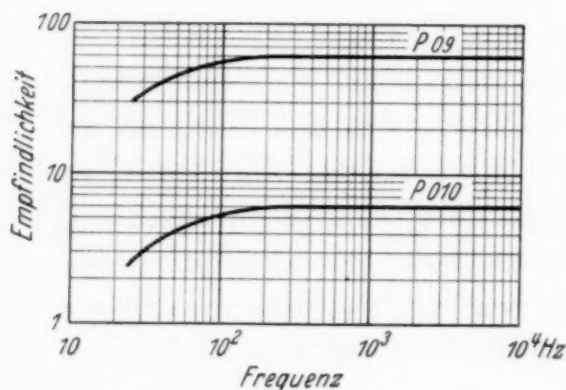


Fig. 2. Frequenzabhängigkeit zweier Bleiglanzzellen verschiedener Absolutempfindlichkeit.

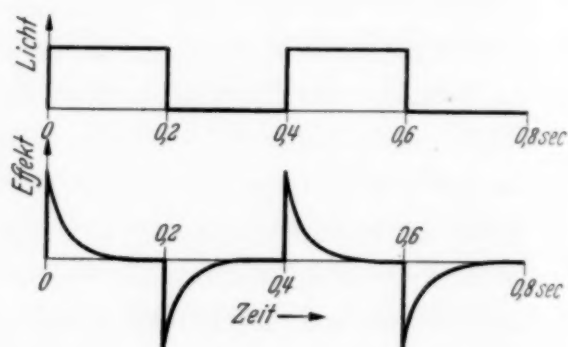


Fig. 2a. Einschaltvorgänge bei Belichtung einer Bleiglanzzelle; schematisch.

3. *Abhängigkeit des Effektes von der Lichtwechselzahl.* Um die — nur geringe — Frequenzabhängigkeit des Verstärkers auszuschalten, wurden die Becquerel-Zellen mit einer Hochvakuumzelle verglichen. Da der Widerstand der untersuchten Bleiglanzzelle wie auch der Eingangswiderstand des Verstärkers rund 100 Ohm betrug, und der Vakuumphotozelle 100 Ohm parallel geschaltet waren, wurden Anpassungsfehler beim Vergleich der Zellen vermieden. Fig. 2 zeigt die für die „trägen“ Becquerel-Effekte bemerkenswerte Tatsache, daß der Effekt von 100 bis 10000 Hertz konstant ist [vgl. das entsprechende Verhalten von Cu_2O^1]. Nach tiefen Frequenzen hin nimmt der Effekt sogar ab. Da der Verstärker unterhalb 50 Hertz nicht mehr brauchbar war, wurden die Einschaltvorgänge mit einem Saiten-galvanometer registriert; das Licht wurde dabei zweimal je Sekunde innerhalb 10^{-3} Sekunden ein- und ausgeschaltet. Die Registrierung ergab, daß beim Lichteinsatz zwar trägheitsfrei (auf Grund der Verstärkermessungen in weniger als 10^{-4} Sekunden) der Effekt einsetzt, aber bei Dauerbelichtung

¹⁾ G. Faltz, Ann. d. Phys. 30, Heft 2, 1937 im Erscheinen.

dann mit einer Zeitkonstante von rund 0,05 Sekunden auf einen kleinen Bruchteil abklingt. Wird das Licht abgeschaltet, so tritt ein entgegengesetzter Stromstoß auf, der ebenso rasch abklingt (vgl. Fig. 2a). Im Gleichlicht sind also praktisch überhaupt keine Effekte zu beobachten. Daher sind unsere Messungen ausschließlich mit Wechsellicht ausgeführt worden.

4. *Abhängigkeit von der Lichtintensität.* Während Becquerel-Effekte in der üblichen Beobachtungsweise der Lichtintensität keineswegs pro-

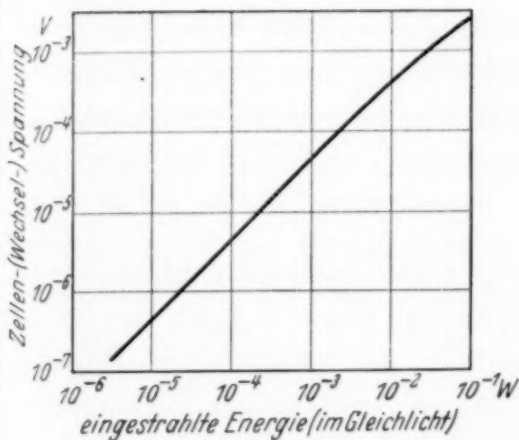


Fig. 3. Intensitätsabhängigkeit des Effektes im weißen Licht.

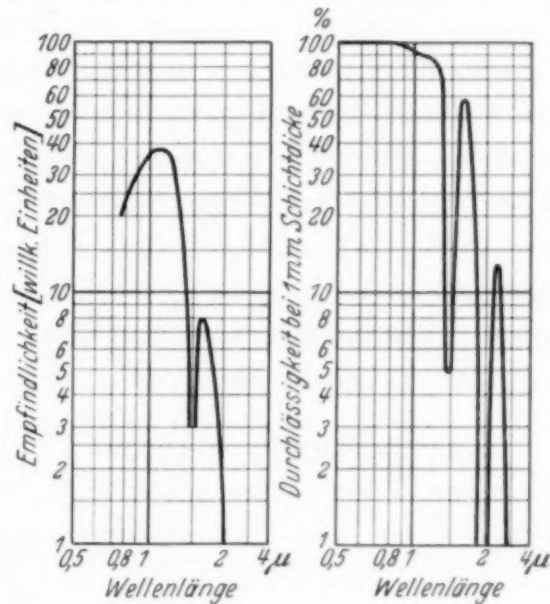


Fig. 4. Spektrale Verteilung des Effekts. Links: Meßergebnis. Rechts: Durchlässigkeit einer der Zelle entsprechenden Wasserschicht nach Dreisch (ZS. f. Phys. 30, 206, 1924).

portional sind, zeigte sich hier im Wechsellicht von 300 Hertz eine strenge Intensitätsproportionalität in dem großen Bereich von $10^{-5} \dots 10^{-1}$ Watt auffallender Energie (vgl. Fig. 3). Die geringe Abweichung bei noch höheren Intensitäten kann mittelbar durch Erwärmung verursacht sein — bei den höchsten verwendeten Intensitäten konnte die Hand nicht mehr dauernd an die Stelle des Lichtpunktes gehalten werden! Infolge dieses großen Proportionalitätsbereiches ist der Effekt auch ganz derselbe, einerlei ob das auffallende Licht auf die ganze Zellenfläche (1 cm^2) verteilt oder auf 1 mm^2 konzentriert wird.

In Fig. 3 sind als Ordinaten die am Eingang des Verstärkers auftretenden Lichtwechselspannungen aufgetragen, so daß hieraus auch gleich auf die absolute Größe der von uns beobachteten lichtelektrischen Effekte geschlossen werden kann.

5. *Temperaturabhängigkeit.* Im untersuchten Bereich von $0 \dots +50^{\circ}\text{C}$ änderte sich der gemessene Effekt nicht ganz im Verhältnis $1:2$, da aber gleichzeitig der Widerstand der untersuchten Zelle hierbei von 100 auf 15 Ohm abnahm, könnte die beobachtete Effektabnahme hier durch schlechtere Anpassung vorgetäuscht sein und möglicherweise wie beim Cu_2O ¹⁾ der eigentliche Effekt sogar temperaturunabhängig sein.

6. *Spektrale Verteilung.* In Fig. 4 ist die Abhängigkeit des beobachteten Effektes von der Wellenlänge des auffallenden Lichtes angegeben. Die wirkliche spektrale Verteilung des Effektes kann insofern nicht angegeben werden, als oberhalb $1\ \mu$ im wesentlichen nur die Durchlässigkeit des vom Licht durchsetzten Elektrolyten gemessen wird; sie erstreckt sich aber zweifellos durch das sichtbare Gebiet ins Ultrarot über $1,8\ \mu$ hinaus. Versuche mit nichtwässrigen Elektrolyten, die eine größere Durchlässigkeit in diesem Spektralbereich haben, waren nicht erfolgreich; wir benutzten unter anderem Fe_2Cl_3 in Nitrobenzol und Na J in Aceton; die Effekte waren jedoch nicht größer, zum Teil wohl wegen der sehr hohen Widerstände dieser Elektrolyte.

Zusammenfassung. Bleiglanz (PbS) zeigt unter Umständen in Berührung mit einem Elektrolyten lichtelektrische Wirkung; diese ist durch die Trägheitslosigkeit und Intensitätsproportionalität der elektrischen Effekte gesichert. Ungeklärt ist, warum diese Effekte an verschiedenen Vorkommen außerordentlich verschieden stark auftreten und insbesondere an künstlich hergestelltem oder umgeschmolzenem PbS praktisch fehlen.

Diese Beobachtungen sind bedeutungsvoll für die Streitfrage, ob die am Bleiglanz beschriebenen Belichtungsspannungen lichtelektrisch [Grütz-macher²⁾, Lange³⁾] oder thermoelektrisch [Waibel⁴⁾, Tiede und Brückmann⁵⁾] bedingt sind.

¹⁾ G. Faltz, a. a. O. — ²⁾ Telegr. u. Fernsprechtechnik **29**, 283, 1930; Schweizer Patent Nr. 147290, Klasse 120 g; 1931. — ³⁾ Phys. ZS. **31**, 964, 1930; Buch „Photoelemente“, Leipzig, Ambros. Barth, 1936. — ⁴⁾ ZS. f. Phys. **78**, 423, 1932. — ⁵⁾ Ebenda **80**, 302, 1933.

Resonanzniveaus der beiden Br^{80} -Isomere.

Von R. Fleischmann in Heidelberg.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 9. August 1937.)

Es wird die Energie der Resonanzneutronen, welche die isomeren Kerne Br^{80} ($T = 18$ min) und Br^{80} ($T = 4,2$ h) erzeugen, durch Messung der Absorbierbarkeit in Bor gemessen. Die Energie stimmt überein (vgl. Tabelle).

1. Fragestellung. Bei gewissen radioaktiven Stoffen hat man seit einiger Zeit Grund zu der Vermutung, daß Atomkerne existieren, die trotz gleicher Ordnungszahl und gleicher Massenzahl verschiedene Eigenschaften besitzen (Isomere). Ein besonders deutlicher Fall liegt beim Brom vor. Dieses besitzt zwei stabile Isotope $\text{Br}^{79,81}$ und läßt sich einerseits durch Anlagerung langsamer Neutronen¹⁾, andererseits durch photoelektrische Abspaltung eines Neutrons²⁾ umwandeln. Im ersten wie im zweiten Fall entstehen je drei Halbwertzeiten, von denen diejenigen mit 18 min und 4,2 h den beiden Fällen gemeinsam sind. Bothe und Gentner²⁾ haben daraus geschlossen, daß beide dem Br^{80} zugehören, welches hiernach in zwei isomeren Formen existiert. Die Entstehung dieser Isomere durch Neutronenanlagerung wird im folgenden untersucht.

Bei der Anlagerung langsamer Neutronen beobachtet man Resonanzeinfang für bestimmte Neutronenenergie. Um die Frage der Entstehung isomerer Kerne zu klären, erscheint es wichtig zu untersuchen, ob den isomeren Formen des Br^{80} verschiedene Resonanzenergien für das Einfangen des Neutrons entsprechen, oder ob beide mit der gleichen Resonanzenergie gebildet werden. Im ersten Fall würden bereits beim Einfangprozeß verschiedenartige Zwischenkerne zustande kommen, im zweiten Fall würde der gleiche Zwischenkern entstehen, der sich erst bei der Abgabe der freigewordenen Bindungsenergie in eine der beiden isomeren Formen umwandeln würde. Dieser letztere Fall würde nach Weizsäcker³⁾ theoretisch besser verständlich sein und auf Energiezustände mit wesentlich verschiedenem Spin zurückgehen.

¹⁾ E. Amaldi, O. D'Agostino, E. Fermi, B. Pontecorvo, E. Segrè, Proc. Roy. Soc. London (A) **149**, 522, 1935; Ric. Scientif. **6**, (1) Nr. 11—12, 1935; B. Kurtsshatow, L. Myssowski, L. Russinow, C. R. **200**, 1201, 1935. —

²⁾ W. Bothe u. W. Gentner, Naturwissensch. **25**, 90, 126, 191, 284, 1937; ZS. f. Phys. **106**, 236, 1937. — ³⁾ C. F. v. Weizsäcker, Naturwissensch. **24**, 813, 1936.

Die Resonanzenergie läßt sich mit Hilfe der Absorbierbarkeit der Resonanzneutronen in Bor bestimmen. Man muß dazu das Schwächungsverhältnis in einem Borabsorber für die Anfangsaktivierung der beiden Halbwertzeiten von Brom möglichst genau messen und prüfen, ob es verschieden ist oder übereinstimmt. Die daraus abgeleiteten Energiewerte können wegen der Unsicherheit gewisser Korrekturen nur mit Vorbehalt angegeben werden, sie sind für diese Frage auch ohne Bedeutung.

Es besteht noch eine zweite Möglichkeit, wenigstens ungefähr die Gleichheit oder Verschiedenheit von Resonanzniveaus zu prüfen. Der Wirkungsquerschnitt für thermische Neutronen (Gruppe C) ist durch den Ausläufer des Resonanzgebietes bestimmt. Beide Halbwertzeiten werden in einem gewissen Verhältnis angeregt. Wenn die Resonanzkurven, die zu zwei Halbwertzeiten gehören, gleich sind, so muß auch die Anregung durch Neutronen der Gruppe C im gleichen Verhältnis stehen wie die durch Resonanzneutronen.

2. *Absorptionsmessungen in Bor.* Eine Neutronenquelle $\text{Ra Em} + \text{Be}$ (80 bis 40 mC) befand sich in der Mitte eines Paraffinblockes von $20 \times 20 \text{ cm}^2$ Grundfläche und 10 cm Höhe. Die austretenden Neutronen wurden durch große Cadmiumbleche von $40 \times 40 \times 0,1 \text{ cm}^3$ gefiltert zur Absorption der C-Neutronen und trafen dann oberhalb und unterhalb auf zwei gleichartige geschmolzene Schichten von Hexabrombenzol (C_6Br_6), die vollkommen symmetrisch zur Quelle aufgestellt waren. Nach der einen Richtung wurde eine geschmolzene Schicht aus Boroxyd (B_2O_3) als Absorber für die Resonanzneutronen eingeschoben. Die C_6Br_6 -Schichten wurden stets gleichzeitig über Nacht bestrahlt, die kürzere Halbwertzeit war dabei bis zur Sättigung, die längere etwa zu 90% angeklungen. Während mit der einen Schicht die Messung der Abklingungskurve begann, wurde die andere noch weiterbestrahlt. Korrekturen für Verschiedenheit der Anklingung wurden durch geeignete Vertauschung innerhalb der Meßreihen unnötig gemacht. Die ausgesandten β -Strahlen wurden mit einem dünnwandigen Al-Zählrohr mit Verstärker und Zählwerk gemessen.

Das Ergebnis der Abklingungsmessungen ist in Fig. 1 zusammengestellt. Im unteren Diagramm sind die gemessenen Teilchenzahlen mit und ohne Absorber als Funktion der Zeit in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Die mit Ringen eingetragenen Punkte beziehen sich auf die Messung ohne Borabsorber, die mit Kreuzen auf die Messung mit Absorber. Um den Vergleich zu erleichtern, wurden die beiden Meßreihen in dem Teil, wo nur die Halbwertzeit 4,2 h noch merkliche Intensität hat, durch Maß-

stabsänderung zur Deckung gebracht. Man erkennt deutlich, daß auch die übrigen Punkte im Anfangsteil der Kurve für beide Meßreihen zusammenfallen. Der Anfangsteil ist nach Abzug des extrapolierten Anteils der langen Halbwertszeit in größerem Maßstab noch einmal im oberen Diagramm

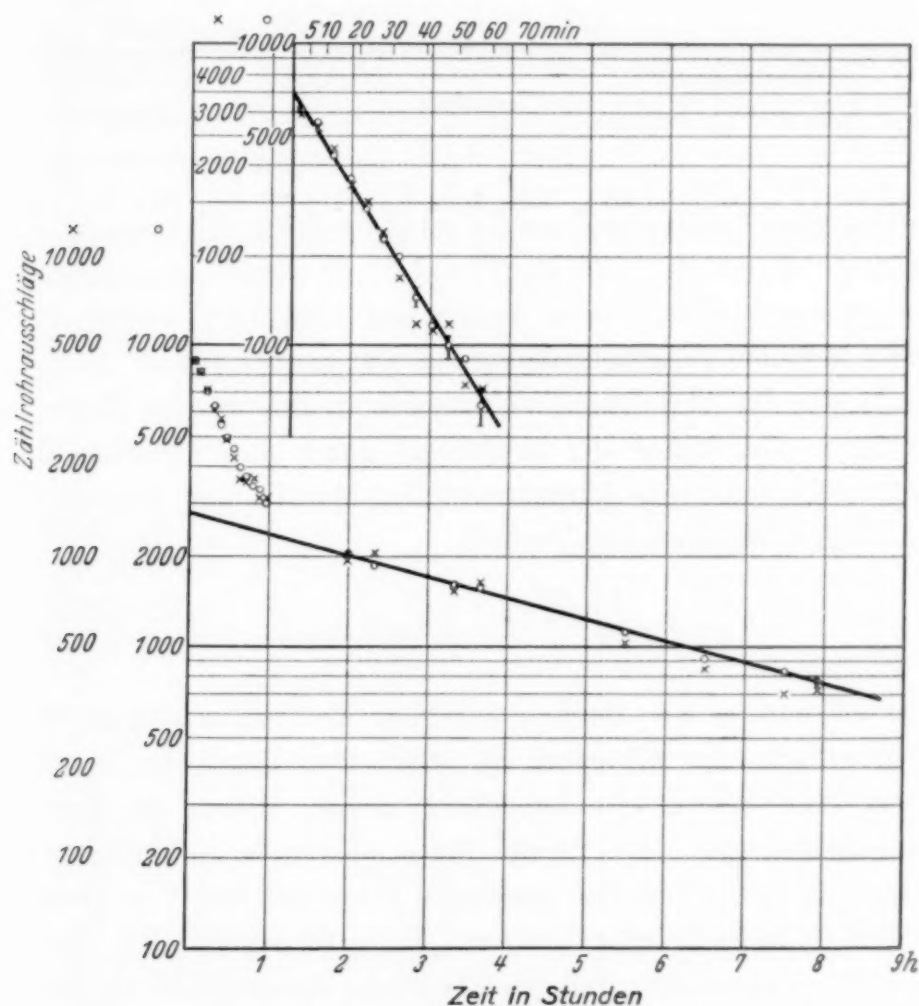


Fig. 1. Abklingung der beiden radioaktiven Br^{80} -Isomere, aktiviert durch Resonanzneutronen. Beim ersten und letzten Punkt ist der doppelte mittlere Fehler eingetragen, beim ersten Punkt ist er kleiner als der Ringdurchmesser.

wiedergegeben. Das Schwächungsverhältnis stimmt demnach für beide Halbwertszeiten überein und beträgt unter den Meßbedingungen 2,01 : 1. Ein Einfluß der dritten Halbwertszeit $T = 36$ h war unter den Meßbedingungen nicht nachweisbar.

Die Tatsache gleicher Absorbierbarkeit ist aus dem Diagramm deutlich zu ersehen. Um Unsicherheiten der graphischen Auswertung zu vermeiden, wurde das gesamte Material auch noch rechnerisch ausgewertet. Dazu wurde aus den gemessenen Punkten die Anfangsintensität für den Zeit-

punkt 0 h 0 min unter Voraussetzung exponentieller Abklingung mit $T = 18$ min und $T = 4,2$ h berechnet. Die Werte wurden mit Gewichten proportional $1/\varepsilon^2$ versehen, wo ε der mittlere relative Fehler ist, und das gewogene Mittel für die Anfangsintensität bestimmt. Man erhält so die folgende Tabelle:

Halbwertszeit	Anfangsintensität		Verhältnis	$\mu \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ Bor	E_{res} in e-Volt
	ohne Absorber	mit Absorber			
$T = 18$ min	$6890 \pm 1,72\%$	$3420 \pm 1,08\%$	$2,01_5 \pm 2,0\%$	$0,618 \pm 2,9\%$	$52,2 \pm 5,7\%$
$T = 4,2$ h	$2780 \pm 0,76\%$	$1385 \pm 1,38\%$	$2,00_6 \pm 1,6\%$	$0,613 \pm 2,3\%$	$53,2 \pm 4,6\%$

Das *Schwächungsverhältnis* stimmt danach auf etwa 0,5% überein bei einem mittleren Fehler der Einzelbestimmung von rund 1,8%.

Zur Berechnung des Absorptionskoeffizienten in Bor müssen Korrekturen für schrägen Durchgang der Neutronen durch den Absorber angebracht werden. Rechnet man ähnlich wie Goldsmith und Rasetti¹⁾ nach der von Fermi angegebenen Formel

$$J = J_0 \cdot \int_0^1 e^{-\frac{\mu d}{x}} (1 + \sqrt{3} x) dx,$$

wo $x = \cos \varphi$ ist und φ der Winkel zwischen Neutronenrichtung und Normale zur Oberfläche des Absorbers, so erhält man die in der Tabelle, Spalte 5 angegebenen Werte. In der letzten Spalte stehen die daraus folgenden Resonanzenergien. Die Werte für μ stehen in befriedigender Übereinstimmung mit dem von den genannten Forschern für $T = 18$ min gefundenen Wert $\mu = 0,57 \text{ cm}^2/\text{g}$ Bor und $E_r = 62$ e-Volt. Bei dieser Auswertung wird vorausgesetzt, daß die aktivierte Bromschicht als dünn betrachtet werden darf. Ob diese Voraussetzung berechtigt ist, muß allerdings dahingestellt bleiben; sie ist nicht unbedingt sicher, da der Wirkungsquerschnitt der Resonanzneutronen möglicherweise sehr groß ist. Die hier verwendeten Schichten hatten eine Dicke von $0,5 \text{ g/cm}^2$ C_6Br_6 , waren also noch etwas dünner als die von Goldsmith und Rasetti.

3. *Anregungsverhältnis bei verschiedenen Neutronenenergien.* Wenn tatsächlich außer der Lage des Resonanzmaximums auch die ganze Resonanzkurve für die Entstehung beider Halbwertszeiten gleich ist, so muß auch das Intensitätsverhältnis der Aktivierung mit Resonanzneutronen und mit thermischen (C-)Neutronen gleich sein. Für die Resonanzneutronen

¹⁾ H. Goldsmith u. F. Rasetti, Phys. Rev. **50**, 328, 1936.

erhält man aus den obigen Zahlen für Bestrahlung bis zur Sättigung als Verhältnis der beiden Anfangsaktivitäten ohne Borabsorber

$$6890 : (2780 \cdot 1,14) = 2,18 : 1.$$

Der Faktor 1,14 berücksichtigt, daß die längere Halbwertszeit nicht bis zur vollen Sättigung angeklungen war. Für thermische Neutronen fanden Johnson und Hamblin¹⁾ das entsprechende Verhältnis $8 : 3,5 = 2,3 : 1$. Die Übereinstimmung ist sehr befriedigend und deutet auf Gleichheit der ganzen Resonanzkurve.

Herrn Prof. Bothe danke ich herzlichst für sein Interesse an dieser Untersuchung, Herrn Dr. Juza für die Herstellung des Hexabrombenzols.

¹⁾ C. H. Johnson u. F. T. Hamblin, Nature **138**, 504, 1936.

Die Bildfehler 3. Ordnung der kurzen schwachen rein elektrischen Elektronen-Einzellinse.

Von H. Riedl in Berlin-Gatow, Luftkriegsschule.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 10. August 1937.)

Im Grenzfall der kurzen schwachen rein elektrischen Einzellinse nehmen die Gleichungen für die elektronenoptischen Bildfehler eine übersichtliche Form an.

Die von verschiedener Seite angegebenen¹⁾ allgemeinen Ausdrücke für die Bildfehler der Elektronenlinsen sind lang und unübersichtlich. Es ist daher zweckmäßig, durch Spezialisierung auf bestimmte Linsentypen einfache Fehlerausdrücke aus den allgemeinen Formeln zu entwickeln. Im folgenden soll dies für den Spezialfall der kurzen schwachen rein elektrischen Einzellinse geschehen.

Es sind zunächst folgende Begriffe festzulegen:

„Kurz“ heißt eine Elektronenlinse, deren Ausdehnung in der Achsenrichtung klein gegen die Brennweite f ist. (Die Bezeichnung „kurze Linse“

entspricht also der Bezeichnung „dünne Linse“ in der Glasoptik.)

„Einzellinse“ heißt eine Linse, auf deren beiden Seiten das Potential Φ den gleichen Wert hat, d. h. bei der das Potential Φ_a im Objektraum gleich dem Potential Φ_b im Bildraum ist (siehe Fig. 1).

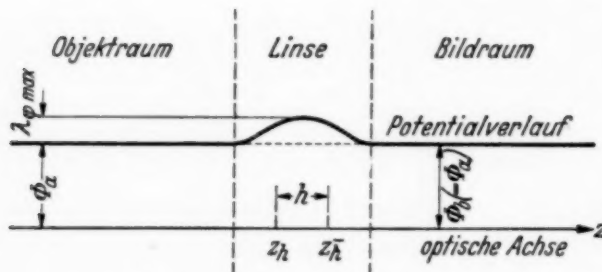


Fig. 1. Beispiel für das Achsenpotential einer schwachen Einzellinse.

„Schwach“ heißt eine Linse, deren (auf der optischen Achse gemessenes) Potential Φ sich im Linseninnern prozentual nur wenig ändert. Setzt man $\Phi = \Phi(z) = \Phi_a(1 + \lambda \varphi(z))$, so ist bei einer „schwachen Linse“ $\lambda \varphi \ll \Phi_a$. Im folgenden werden alle Formeln nach steigenden Potenzen des Entwicklungsparameters λ entwickelt.

Die Bezeichnung „Bildfehler 3. Ordnung“ bedeutet in der Elektronenoptik dasselbe wie in der Lichtoptik. Man bezeichnet²⁾ den Achsenabstand des achsennahen flachen („Gaußschen“ oder „paraxialen“) Strahlengangs mit r^* , und mit ψ^* seinen (um die optische Achse zählenden) Drehwinkel

¹⁾ E. Brüche u. O. Scherzer, *Geom. Elektronenoptik*; W. Glaser, *Ann. d. Phys.* **18**, 557, 1933; *ZS. f. Phys.* **81**, 649, 1933; **97**, 177, 1935 u. a.; O. Scherzer, *ZS. f. Phys.* **101**, 593, 1936 u. a.; P. Funk, *Monatsh. d. Math. u. Phys.* **43**, 305, 1936. — ²⁾ *Geom. Elektronenopt.*, S. 128.

(Zylinderkoordinaten z, r, ψ); d. h. durch r^* und ψ^* als Funktionen von z ist der Strahlverlauf der Gaußschen Dioptrik dargestellt. Nun seien ϱ bzw. δ die durch die Linsenfehler 3. Ordnung bedingte radiale bzw. azimutale Abweichung vom Gaußschen Strahlengang; der wirkliche Achsenabstand r des nicht mehr achsennahen, sondern mit den Bildfehlern 3. Ordnung behafteten Strahlenganges werde also dargestellt durch $r^* + \varrho$ und entsprechend der wirkliche Drehwinkel ψ durch $\psi^* + \delta$.

Man findet¹⁾ für die Abweichungen ϱ und δ der Elektronenbahnen vom Gaußschen Strahlengang, gemessen in der (Gaußschen) Bildebene:

$$\varrho + i r^* \delta = - \frac{V}{\sqrt{\Phi_a}} \int_{z_a}^{z_b} \frac{B_1 r_a}{\sqrt{\Phi}} e^{i\psi^*} dz \quad (1)$$

mit

$$B_1 e^{i\psi^*} = \frac{\Phi^{(4)}}{32} u^2 \bar{u} - \frac{\Phi''^2}{16\Phi} u^2 \bar{u} - \frac{\Phi''}{4} u u' \bar{u}' + \frac{\Phi'''}{8} u \bar{u} u' - \frac{\Phi'' \Phi'}{8\Phi} u \bar{u} u' - \frac{\Phi'}{2} u'^2 \bar{u}'. \quad (2)$$

Die komplexe Variable u verknüpft hierbei Achsenabstand r und Drehwinkel ψ gemäß $u = r^* e^{i\psi^*}$; $\bar{u} = r^* e^{-i\psi^*}$. V ist das Vergrößerungsverhältnis; die Ableitungsstriche bedeuten Differentiationen nach z ; die Grenzen des Integrals (1) sind die Objektebene $z = z_a$ und die Bildebene $z = z_b$.

Die (radiale) Differentialgleichung des Gaußschen Strahlenganges lautet für ebene Bahnen in der rein elektrischen Linse:

$$\sqrt{\Phi} \frac{d}{dz} \left(\sqrt{\Phi} \frac{dr^*}{dz} \right) = - \frac{r^* d^2 \Phi}{4 dz^2}. \quad (3)$$

Durch zweimalige Integration dieser Differentialgleichung und anschließende schrittweise Approximation erhält man³⁾:

$$\left. \begin{aligned} r^* &= \sum_{v=0}^{\infty} r_v \text{ mit } r_0 = r_a + \sqrt{\Phi_a} r'_a \int_{z_a}^z \frac{dz}{\sqrt{\Phi}}, \\ r_v &= - \int_{z_a}^z \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \left(\int_{z_a}^z \frac{\Phi'' r_{v-1}}{4 \sqrt{\Phi}} dz \right) dz. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

¹⁾ O. Scherzer, ZS. f. Phys. **101**, 597, 1936, Gleichung (9) mit (6). —

²⁾ Da es sich um die rein elektrische Linse handelt ($\mathfrak{H} \equiv 0$), kann obige Größe ψ mit der l. c. verwendeten Größe χ identifiziert werden (siehe auch Geom. Elektronenopt., III, 15, (46)). — ³⁾ Geom. Elektronenopt., S. 96, Gleichung (15).

Geht man in der Gleichung (4) bis $\nu = 1$ und setzt man für die Potentiale, wie schon bemerkt, $\Phi = \Phi_a (1 + \lambda \varphi)$ ein — dabei ist also $\Phi'' = \Phi_a \lambda \varphi''$ — und entwickelt man durchgehend bis zur 1. Potenz von λ , so erhält man aus der Gleichung (4):

$$r^* = r_a + r'_a (z - z_a) - \frac{\lambda \varphi}{4} r_a - \frac{\lambda \varphi}{4} (z - z_a) r'_a. \quad (5)$$

(Der Index a meint hier und später die betreffenden Größen in der Objektebene $z = z_a$.)

Die in obigem Integral (1) vorkommende Größe r_a ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (3) mit den Anfangsbedingungen (für die Objektebene $z = z_a$): $(r_a)_{z_a} = 0$; $(r'_a)_{z_a} = 1$. Hierzu wird im folgenden noch die Größe r_β hinzugenommen als zweite partikuläre Lösung der Differentialgleichung (3) mit den Anfangsbedingungen: $(r'_\beta)_{z_a} = 0$; $(r_\beta)_{z_a} = 1$.

Nun setzt sich aber r^* aus den beiden partikulären Lösungen r_a, r_β folgendermaßen zusammen¹⁾:

$$r^* = r'_a r_a + r_a r_\beta. \quad (6)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (6) und (5) erhält man also bei Entwicklung bis zur 1. Potenz von λ für r_a, r_β die folgenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} r_a &= (z - z_a) \left(1 - \frac{\lambda \varphi}{4} \right), \\ r_\beta &= \left(1 - \frac{\lambda \varphi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ähnlich wie r^* [in Gleichung (6)] setzt sich die Variable u aus r_a, r_β folgendermaßen zusammen²⁾:

$$u = (r'_a + i r_a \psi'_a) r_a + r_a r_\beta. \quad (8)$$

Die Entwicklungen (7) für r_a, r_β sind in den Ausdruck (8) einzusetzen und mit der so erhaltenen Form von u ist in die Fehlergleichungen (1) und (2) einzugehen. Vor Ausführung der Integration in (1) ist es jedoch zweckmäßig, zunächst die Entwicklungskoeffizienten der aus (1) zu erhaltenden Fehler festzustellen; dies erleichtert später die Identifikation der einzelnen Fehler.

Man führt dazu eine (Apertur-) Blende ein, die (ebenso wie die Objekt- und Bildebene) auf der optischen Achse senkrecht steht; ihr Ort auf der Achse heiße $z = z_B$. Nun versieht man die drei Ebenen (Objektebene $z = z_a$, Blendenebene $z = z_B$ und Bildebene $z = z_b$) je mit Cartesischen

¹⁾ Geom. Elektronenopt., S. 84, Anm. 1. — ²⁾ Ebenda, S. 117, Gleichung (49) und (50).

Koordinaten, deren Nullpunkt im Durchstoßpunkt der Achse mit der jeweiligen Ebene liegt. Die drei Koordinatensysteme sollen keine Verdrehung gegeneinander aufweisen. Durch die übliche Koordinatenzusammenfassung $x + iy$ können dann die drei Ebenen als komplexe Zahlenebenen behandelt werden.

Man betrachtet nun (siehe Fig. 2) einen Strahl, der in der komplexen Objekzebene von einem beliebigen Punkt ausgeht. In der Blendenebene soll der betrachtete Strahl rein reell sein (d. h. sein Durchstoßpunkt soll auf der x -Achse liegen).

Die (in Fig. 2 eingezeichneten) Winkel ξ , η des betrachteten Strahls mit den Koordinatenrichtungen genügen dabei den Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \xi = r'_a; \quad \operatorname{tg} \eta = r_a \psi'_a.$$

Man macht nun folgende formale Zusammenfassung:

$$r'_a \pm i r_a \psi'_a = \xi \pm i \eta = \zeta \text{ bzw. } \bar{\zeta}. \quad (9)$$

Diese Beziehung (9) wird nun in die Gleichung (8) für die Variable u eingesetzt. Letztere Gleichung (8) enthält noch eine Größe r_a , die man jetzt

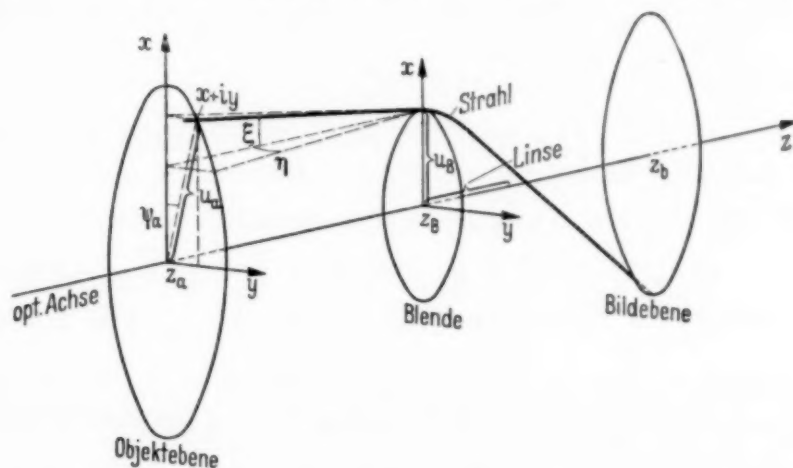


Fig. 2. Bestimmungsstücke eines windschiefen Strahls.

zweckmäßig in u_a umbenennt, da ja der Strahlort in der Objekzebene komplex sein soll. Wenn man nun den Nullpunkt von z in die Blende legt (was für alles Folgende zu beachten ist), so gilt für diese Größe u_a :

$$u_a = \zeta z_a + u_B. \quad (10)$$

Setzt man nun die Beziehungen (9) und (10) und gleichzeitig die Formeln (7) für r_a , r_B in die Gleichung (8) für die Variable u ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} u &= (\zeta z + u_B) \left(1 - \frac{\lambda \varphi}{4} \right), \\ \bar{u} &= (\bar{\zeta} z + u_B) \left(1 - \frac{\lambda \varphi}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Diese endgültige, für die schwache Linse gewonnene Form (11) für u ist nun in die Fehlergleichung (1) mit (2) einzusetzen; gleichzeitig ist der Ausdruck für r_a aus der Gleichung (7) in (1) einzusetzen. Außerdem ist für die vorkommenden Potentiale wieder, wie schon früher, $\Phi = \Phi_a(1 + \lambda \varphi)$ einzusetzen und jetzt bis zur zweiten Potenz von λ zu entwickeln. Für das Vergrößerungsverhältnis V schreibt man zweckmäßig $V = -b/a$ und berücksichtigt $a = -|z_a|$. (Da die Brennweite der schwachen Linse sehr groß ist, kann die Blende als unmittelbar vor oder in der Linse angenommen werden.) Man erhält so mehrere Glieder mit z_a im Nenner, die gestrichen werden können¹⁾.

Die Auswertung des Integrals (1) ergibt sodann als Fehlerausdruck in der Bildebene²⁾:

$$\begin{aligned}
 -(\varrho + ir^*\delta)_{z=z_B} = & \frac{\lambda^2 b}{64} \zeta^2 \bar{\zeta} \int_{-\infty}^{+\infty} (5 \varphi''^2 z^3 + 6 \varphi'^2 z) dz \quad (\text{Verzeichnung}) \\
 & + \frac{\lambda^2 b}{64} \zeta^2 u_B \int_{-\infty}^{+\infty} (5 \varphi''^2 z^2 - 2 \varphi'^2) dz \quad (\text{Astigmatismus}) \\
 & + \frac{\lambda^2 b}{64} \zeta \bar{\zeta} u_B \int_{-\infty}^{+\infty} (10 \varphi''^2 z^2 + 8 \varphi'^2) dz \quad (\text{Mittl. Bildwölbg.}) \\
 & + \frac{\lambda^2 b}{64} \zeta u_B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 10 \varphi''^2 z dz \quad (\text{Komastrich}) \\
 & + \frac{\lambda^2 b}{64} \bar{\zeta} u_B^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 5 \varphi''^2 z dz \quad (\text{Komascheibchen}) \\
 & + \frac{\lambda^2 b}{64} u_B^3 \int_{-\infty}^{+\infty} 5 \varphi''^2 dz \quad (\text{Öffnungsfehler})
 \end{aligned} \quad (12)$$

Bezüglich der Identifikation und Diskussion dieser Fehler kann auf eine sehr anschauliche, von O. Scherzer³⁾ angegebene Methode verwiesen werden.

¹⁾ Für den Fall der Verwendung der Linse zu Abbildungszwecken ist ja z_a mindestens gleich der Brennweite f ; $1/f$ ist aber schon von der Größenordnung λ^2 . Für eine Vorschaltlinse würde dies nicht gelten. — ²⁾ Die Grenzbeiträge der partiellen Integrationen fallen bei der Einzellinse weg; die Grenzen z_a, z_b sind wegen der Kürze der Linse durch $-\infty$ bzw. $+\infty$ zu ersetzen; alle Terme von höherer Ordnung als λ^2 sind vernachlässigt; alle Terme von der Ordnung λ^1 fallen von selbst heraus. — ³⁾ ZS. f. Phys. **101**, 593, 1936, S. 597 ff.

Zu diesem Zweck sind noch die obenstehenden Entwicklungskoeffizienten mit den l. c. gebrauchten in Einklang zu bringen. Obenstehende Größe u_B und die l. c. gebrauchte Größe „ u_B “ entsprechen sich direkt; obenstehende Größe ζ entspricht dem l. c. gebrauchten Buchstaben „ r_a “ mit folgender Veränderung: l. c. wird ein Strahl betrachtet, der im Gegensatz zu der vorstehenden Behandlung in der Objekt- (und Bild-) Ebene rein reell und in der Blendenebene komplex ist. (Für die schwache Linse hat sich die vorstehende Behandlung als zweckmäßiger erwiesen.) Daher haben die obenstehenden Größen ζ , u_B gegenüber den l. c. entsprechenden Größen „ r_a , u_B “ die komplexe bzw. rein reelle Zustandsform vertauscht. Außerdem hat ζ nicht die Dimension einer Länge, sondern die eines Winkels, d. h. im vorstehenden sind die Fehler nicht, wie l. c. angegeben, nach Achsenabstand in Objekt- und Blendenebene, sondern nach Einfallswinkel und Achsenabstand in der Blendenebene angeordnet.

Nimmt man wie in der Lichtoptik die beiden Komafehler zu einem einzigen Fehler zusammen, so hat auch die (rein elektrische) Elektronen-Einzellinse genau wie die Glasoptik nur fünf Fehler 3. Ordnung.

Im Gegensatz zu den Formeln der starken Linse enthält Gleichung (12) nur noch das Achsenpotential Φ und seine Ableitungen; die Funktionen u und r_a , die bei starken Linsen erst mühsam durch Integration der achsen-nahen Bahngleichung bestimmt werden müssen, sind aus der Fehlerformel verschwunden.

Bezüglich der Korrektionsmöglichkeit dieser Fehler ist zu sagen:

Öffnungsfehler und *Bildwölbung* sind durch positiv definite Integrale gegeben und verschwinden daher nicht. Strahlen, die von der Objektmitte ausgehen, schneiden sich *stets* vor der Bildebene. Die mittlere ebenso wie die tangentielle Bildschale sind gegen die Linse konkav; ihre Krümmungen sind gegeben durch:

$$\frac{1}{\varrho_m} = \frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^{+\infty} (10 \varphi''^2 z^2 + 8 \varphi'^2) dz = \frac{4}{3f} + \frac{5}{16} \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2 z^2 dz;$$

$$\frac{1}{\varrho_t} = \frac{\lambda^2}{32} \int_{-\infty}^{+\infty} (15 \varphi''^2 z^2 + 6 \varphi'^2) dz = \frac{1}{f} + \frac{15}{32} \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2 z^2 dz.$$

Bezüglich Bildwölbung und Aberration ist es also nicht Aufgabe der Theorie, schwache Linsen zu suchen, die von diesen Fehlern frei sind, sondern

durch geeignete Wahl des Potentials sind diese Fehler zum Minimum zu machen¹⁾).

Im Gegensatz hierzu können *Verzeichnung* und *Koma* schon durch bloßes Verschieben der Blende zum Verschwinden gebracht werden (bzw. verschwinden sie für symmetrische Linsen durch Anordnung der Blende in der Mitte). Die Verzeichnung ist *tonnenförmig*, falls die Blende *vor* der Linse liegt und *kissenförmig* im umgekehrten Fall.

Weniger übersichtlich ist das Integral, das den *Astigmatismus* bestimmt. Es ist denkbar, daß sich die beiden mit verschiedenem Vorzeichen unter dem Integral stehenden Terme für bestimmte Funktionen Φ kompensieren können.

Schließlich ist es dem Verfasser eine angenehme Pflicht, Herrn Prof. Scherzer, Darmstadt, ergebenst zu danken für sein Interesse und die weitgehende Hilfe bei der Abfassung vorliegender Arbeit.

¹⁾ Bezüglich der Aberration ist die Variationsrechnung zur Auffindung der bestkorrigierten schwachen Linse bereits durchgeführt bei O. Scherzer, ZS. f. Phys. **101**, 23, 1936.

Über die Anomalien der festen Dielektrika.

Von B. Gross.

Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 28. Juni 1937.)

Die Anomalien, welche man bei der Entladung eines Kondensators bei geöffnetem äußerem Stromkreis beobachtet, werden in das von Schweidler¹⁾ gegebene Schema eingeordnet. Unter der Annahme der Gültigkeit des Superpositionsprinzips läßt sich so die allgemeine Entladungsgleichung aufstellen; diese wird integriert und die Lösung ermöglicht eine ausführliche Diskussion aller auftretenden Erscheinungen und ihrer Bedeutung für die Meßtechnik. Eine Reihe von Messungen verdeutlichen das Ergebnis der Rechnung.

Einleitung und Zusammenfassung. Das anomale Verhalten der Dielektrika ist schon in einer großen Anzahl von Arbeiten, die zum Teil noch aus dem letzten Jahrhundert datieren, untersucht worden. Die Möglichkeit einer systematischen Forschung auf diesem Gebiet verdanken wir jedoch erst der grundlegenden Arbeit von Schweidler¹⁾.

Schweidler unterschied die folgenden vier Hauptformen anomalen Verhaltens: 1. Existenz eines Nachladungsstromes, 2. dielektrische Verluste, 3. ponderomotorische Kräfte, 4. scheinbare Abhängigkeit der Kapazität von der Ladedauer. Er zeigte, daß die Form 1 zwangsläufig auch zu 2 bis 4 führt und daß somit aus den empirischen Gesetzen für den Nachladestrom auch der Verlauf der übrigen Erscheinungen folgt. Seine Rechnung beruht auf der Anwendung des auf Boltzmann-Hopkinson²⁾ und Curie³⁾ zurückgehenden Superpositionsprinzips, mit dem so auch die quantitative Berechnung der dielektrischen Verluste gelang.

Eine Reihe späterer Arbeiten von Tank⁴⁾, Benedict⁵⁾, Sommermann⁶⁾, Whitehead⁷⁾, Neufeld⁸⁾ und Sinjelnikoff und Walther⁹⁾ führt die Untersuchung im Sinne der Schweidlerschen Methode weiter. Man kann die in diesen Arbeiten zum Ausdruck kommende Auffassung als die *phänomenologische* bezeichnen, insofern als eine der Anomalien — der Nachladestrom — als empirisch gegeben angesehen und hieraus das restliche Verhalten abgeleitet wird.

¹⁾ E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. **24**, 711, 1907. — ²⁾ L. Boltzmann, Ann. d. Phys., Erg.-Bd. **7**, 624, 1876; L. Hopkinson, Phil. Trans. **166**, 489, 1876; **167**, 599, 1878. — ³⁾ I. Curie, Ann. Chim. Phys. **17**, 385; **18**, 203, 1889. — ⁴⁾ F. Tank, Ann. d. Phys. **48**, 307, 1915. — ⁵⁾ R. R. Benedict, Transaction of A. I. E. E. **49**, 749, 1930. — ⁶⁾ L. Sommermann, Journ. Frankl. Inst. **219**, 433, 1933. — ⁷⁾ J. B. Whitehead, ebenda **208**, 453, 1929; Transaction A. I. E. E. **51**, 392, 1932. — ⁸⁾ J. Neufeld, Journ. Frankl. Inst. **22**, 327, 1936. — ⁹⁾ K. Sinjelnikoff, A. Walther, ZS. f. Phys. **40**, 786, 1927.

Daneben stehen die *interpretativen* Theorien, welche die Existenz des Nachladestromes selbst erklären möchten. Die *Inhomogenitätstheorie* nach Maxwell-Wagner¹⁾ nimmt an, daß die bei der üblichen Ableitung der Ausdrücke für Kapazität und Widerstand des Systems eingehende Annahme der Homogenität der Substanz nicht zutreffend ist, sondern daß Faserstruktur oder allgemein Inhomogenitäten bestehen. Neuere Ausführungen hierzu finden sich etwa bei Weyers²⁾ und Gemant³⁾. Die *Kapazitätstheorie* nach Pellat⁴⁾, Schweidler (l. c.) setzt die Existenz einer wahren „dielektrischen“ oder „viskosen“ Hysteresis voraus, verlegt also die Anomalien in die Polarisationskomponente des *Verschiebungsstromes*. Neuerdings ist eine solche Ansicht wieder von Scott⁵⁾ ausgesprochen worden. Die *Konduktivitätstheorie* zieht Anomalien des *Leitungsstromes* zur Deutung heran, ohne daß zunächst ein detailliertes Bild der Vorgänge beim Ionen-transport gegeben wird. So wird der von Richardson⁶⁾ eingeführte formale Begriff der Polarisationsspannung von Joffé und seiner Schule⁷⁾ übernommen. Ins einzelne gehende theoretische Grundlagen wurden erst von Jaffé⁸⁾ und Schumann⁹⁾ gegeben. Bei Kristallen wird von Smekal¹⁰⁾ mit großem Nachdruck der Einfluß der Strukturfehler (Lockerstellen) betont.

Wenn hinsichtlich der Interpretation noch keine endgültige Einigung besteht, so wird die (unabhängige) Stellung der Schweidlerschen Theorie hiervon nicht berührt. Denn alle Theorien führen zu demselben formalen Ausdruck für den Gesamtstrom, und umgekehrt kann man — innerhalb des Gültigkeitsbereiches des Superpositionsprinzips — zeigen, daß aus dem äußeren Verhalten (aus direkten Strommessungen) nicht für oder wider eine der Theorien gefolgert werden kann.

¹⁾ J. C. Maxwell, Treatise, Kap. 10; K. W. Wagner, Ann. d. Phys. **40**, 816, 1913; Elektrot. ZS. **1913**, S. 1279; Arch. f. Elektrotechn. **2**, 371, 1914; **3**, 67, 1914. — ²⁾ T. H. Weyers, Nederland. Rad. Gen. **4**, 143, 1930. — ³⁾ A. Gemant, Elektrophysik d. Isolierstoffe. Berlin, Jul. Springer, 1930. — ⁴⁾ H. Pellat, C. R. **128**, 1312, 1899; Ann. chim. Phys. **18**, 150, 1899; Journ. d. Phys. **9**, 313, 1903. — ⁵⁾ A. H. Scott, Bur. of Stand. Journ. of Res. **15**, 13, 1936. — ⁶⁾ S. W. Richardson, Proc. Roy. Soc. London (A) **92**, 41, 1915; **92**, 101, 1915; **107**, 101, 1925. — ⁷⁾ M. A. Joffé, Ann. d. Phys. **72**, 461, 1923; Congresse Solvey 1924; M. A. Joffé, D. Rojansky, K. Sinjelnikoff, ZS. f. Phys. **66**, 143, 1930; E. Joffé, B. Hochberg, ebenda **66**, 172, 1930; D. Nasledow, P. Scharansky, Ann. d. Phys. **3**, 363, 1929; **5**, 429, 1930; **6**, 574, 1930. — ⁸⁾ G. Jaffé, Ann. d. Phys. **16**, 200, 1933. — ⁹⁾ W. O. Schumann, ZS. f. Phys. **75**, 532, 1932; ZS. f. techn. Phys. **11**, 131, 1930; **14**, 23, 1933; Ann. d. Phys. **15**, 843, 1932. — ¹⁰⁾ A. Smekal, ZS. f. Phys. **56**, 579, 1929; **58**, 322, 1929; Phys. ZS. **36**, 743, 1935; **37**, 150, 1936; Die Physik **4**, 1, 1936.

Für die Untersuchung des Verhaltens des Dielektrikums als *Element eines Stromkreises* erscheint daher der Schweidlersche Standpunkt als der allgemeinste und zweckmäßigste — gerade wegen seiner Unabhängigkeit von allen speziellen Annahmen. Bei dieser besonderen Stellung der Schweidlerschen Theorie erscheint es von Interesse, sie zu vervollständigen durch Anwendung auf eine Reihe von Erscheinungen, die zwar gleichfalls zu den Anomalien zu zählen sind, deren systematische Einordnung und quantitative Erfassung im Rahmen dieser Theorie jedoch noch nicht erfolgt ist, obwohl sie besonders augenfällig sind. Es sind dies die Vorgänge, die man beobachtet, wenn die Belegungen eines Kondensators nach vorübergehender Ladung oder Entladung isoliert werden: Die Entladung hängt von der Dauer der Ladung ab und läßt sich auch nicht durch eine einfache Exponentialfunktion darstellen. Und nach vorübergehendem Kurzschluß findet eine Wiederaufladung statt¹⁾.

Eine Diskussion dieser Erscheinungen ist auch wünschenswert im Hinblick auf ähnliche Beobachtungen, die in letzter Zeit beim Studium von *Elektreten* gemacht worden sind (das sind also Dielektrika, die man formiert, d. h. unter der Einwirkung hoher elektrischer Felder hat erstarren lassen)²⁾. Wir glauben, daß hierbei eine quantitative Kenntnis der „normalen“ Anomalien, die schon bei nicht formierten Dielektriken auftreten, von Nutzen ist.

Der Gang der Untersuchung ist folgender: Es wird unter Voraussetzung der Gültigkeit des Superpositionsprinzips die für eine beliebige Form des Nachladestromes gültige *allgemeine Entladungsgleichung* angeschrieben. Eine Diskussion des Verhaltens zu Beginn der Entladung (bzw. Wiederaufladung) liefert allgemeine Ausdrücke für die anfängliche Entlade- bzw. Wiederaufladungsgeschwindigkeit, welche diese Größen in Funktion des Nachladestromes darstellen. Dabei wird auf eine neue Methode zur Bestimmung des *Einsatzstromes* hingewiesen. Eine Darstellung des Nachladestromes als Summe von Exponentialfunktionen erlaubt eine Integration der Grundgleichung und hiermit eine befriedigende qualitative Diskussion des anomalen Verhaltens. Für eine quantitative Diskussion mehr geeignet erscheint die Funktion β/t^n ; mit ihr läßt sich jedoch die Integration nur

¹⁾ Eine Darstellung auf Grund der Inhomogenitätstheorie ist von Maxwell (l. c.) gegeben; im selben Sinne liegen die Darstellungen von Weyers (l. c.) und Valentiner (Müller-Pouillet, Bd. IV, 1); einige Messungen hat neuerdings S. Shimizu veröffentlicht (Science Rep. Tohoku Imp. Un. **21**, 29, 1932). Weitere Hinweise finden sich auch bei G. Oplatka, Diss. Zürich, 1933; Helv. Phys. Acta **6**, 198, 1933. — ²⁾ M. Eguchi, Phil. Mag. **49**, 178, 1925; A. Gemant, ebenda **20**, 929, 1935.

angenähert ausführen. Jedoch genügt diese, um ein besonderes Verhalten in der Nähe des Nullpunktes (beim Öffnen) zu zeigen, das durch die sehr rasche Änderung des Nachladestromes bedingt ist. Schließlich werden die Aussagen der Theorie an einigen Messungen überprüft und einige Folgerungen diskutiert, die sich für die Bestimmung der Kapazitätswerte ergeben.

A. Rechnung.

I. Die allgemeine Entladungsgleichung des anomalen Kondensators. Nach Anlegen einer konstanten Spannung U_0 stellt sich in einem unvollkommenen Dielektrikum ein zeitabhängiger Gesamtstrom J ein, der sich als Summe einer Ohmschen Komponente U_0/R und des Nachladestromes $U_0\varphi(t)$ darstellt. Dabei ist $\varphi(\infty) = 0$; als Ohmscher Widerstand R gilt also der Grenzwert von U_0/J für $t \rightarrow \infty$.

Ändert sich die Spannung diskontinuierlich, so ergibt sich auf Grund des *Superpositionsprinzips*, dessen Gültigkeit im folgenden stets vorausgesetzt wird:

$$J = \frac{U}{R} + \sum \Delta U_i \varphi(t - t_i).$$

Der allgemeinste Fall ist der einer kontinuierlichen Spannungsänderung. Eine solche möge im Zeitpunkt $t = 0$ beginnen, nachdem vorher beliebige diskontinuierliche Änderungen vorausgegangen sein mögen. Der obige Ausdruck geht dann über in

$$J = \frac{U}{R} + C_0 \frac{dU}{dt} + i_0(t) + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \varphi(t - \tau) d\tau. \quad (1)$$

C_0 ist die geometrische Kapazität der Anordnung; $i_0(t)$ ist abkürzend gesetzt für die Summe der Nachladeströme, die noch von den diskontinuierlichen Spannungsänderungen herrühren.

Wir betrachten nunmehr das Verhalten eines Kondensators bei offenem äußerem Stromkreis. Und zwar möge dieser in $t = 0$ geöffnet werden. Die Spannung wird sich dann kontinuierlich ändern, man befindet sich also im Geltungsbereich der Gleichung (1). Dazu kommt aber noch die der Öffnung des Stromkreises Rechnung tragende Bedingung:

$$t > 0: J = 0. \quad (2)$$

Diese Gleichung stellt eine Bedingung für den Verlauf der Spannung dar: diese stellt sich so ein, daß der Gesamtstrom in jedem Augenblick gleich 0 ist.

Aus (1) und (2) folgt als Bestimmungsgleichung für U :

$$\frac{U}{R} + C_0 \frac{dU}{dt} + i_0(t) + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \varphi(t-\tau) d\tau = 0. \quad (3)$$

Im Fall des vollkommenen Kondensators fehlen die beiden letzten Glieder und es folgt die bekannte Formel $U = U_0 e^{-t/RC_0}$. Nach (3) muß sich jedoch der anomale Kondensator ganz anders verhalten.

II. *Präzisierung der Anfangsbedingungen.* Die elektrische Beanspruchung, die der Öffnung des Stromkreises voranging, drückt sich in der Form der Funktion $i_0(t)$ aus. Es sollen die folgenden beiden Fälle betrachtet werden (Fig. 1).

a) *Entladung.* Der Kondensator wird während des Intervalls t_0 mit der konstanten Spannung U_0 geladen. $i_0(t)$ ist dann der von dem Anlegen der Spannung U_0 hervorgerufene Aufladestrom.

b) *Wiederaufladung.* Der Kondensator wird völlig geladen, während des Intervalls t_0 kurzgeschlossen, dann werden die Belegungen freigegeben. $i_0(t)$ ist dann der durch das Abschalten von U_0 hervorgerufene Entladestrom.

Die beiden Fälle lassen sich zusammenfassen.

$$i_0(t) = f U_0 \varphi(t + t_0). \quad (4)$$

Dabei ist

$$\text{Entladung} \quad \begin{cases} f = 1 \\ t = 0: U = U_0, \end{cases} \quad (4a)$$

$$\text{Wiederaufladung} \quad \begin{cases} f = -1 \\ t = 0: U = 0. \end{cases} \quad (4b)$$

III. *Das Verhalten im Moment des Öffnens.* Im Augenblick $t \equiv 0$ ist das Integral in (3) noch 0. Man erhält also allgemeine Beziehungen für die anfängliche Entlade- bzw. Wiederaufladegeschwindigkeit.

a) *Entladung.* Für $t = 0$ folgt aus (3), (4) und (4a):

$$-\frac{1}{U_0} \frac{dU}{dt} \Big|_0 = +\frac{1}{C_0} \varphi(t_0) + \frac{1}{RC_0}. \quad (5a)$$

Die Entladungsgeschwindigkeit nimmt also ab mit der Ladedauer: der Höchstwert für unendlich kurze Ladung (in der nur die geometrische Kapa-

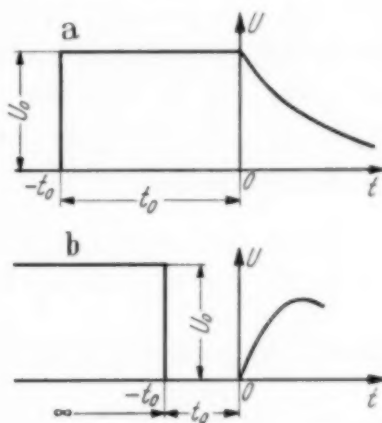


Fig. 1. a) Entladung.
b) Wiederaufladung.

azität aufgeladen wird) ist $\frac{1}{C} \varphi(0) + \frac{1}{RC_0}$; ihr Mindestwert nach unendlich langer Ladedauer ist gleich $+\frac{1}{RC_0}$, also gleich der Zeitkonstante der geometrischen Kapazität.

b) *Wiederaufladung.* Für $t = 0$ folgt aus (3), (4) und (4b):

$$\frac{1}{U_0} \frac{dU}{dt} \Big|_0 = \frac{1}{C_0} \varphi(t_0). \quad (5b)$$

Die Spannung steigt also nach dem vorübergehenden Kurzschluß wieder an; und zwar um so schneller, je geringer t_0 war. Der Höchstwert $\varphi(0)/C_0$ ergibt sich, wenn durch den Kurzschluß nur gerade die Ladung der geometrischen Kapazität zur Erde abgeführt wurde.

Nach (5a) müßte man durch eine statische Messung die geometrische Kapazität der Anordnung bestimmen können: man ermittelt R durch eine Gleichstrommessung und $\frac{dU}{dt} \Big|_0$ als Grenzwert, dem die Entladegeschwindigkeit für $t_0 = \infty$ ($\varphi(\infty) = 0$) zustrebt.

Umgekehrt kann man die Beziehungen (5) zur Bestimmung von $\varphi(t)$ verwenden. Dies bietet insbesondere Interesse wegen der Möglichkeit, so eine neue Methode zur Ermittlung des Einsatzwertes $\varphi(0)$ zu erhalten¹⁾. Man sucht nach dem Grenzwert, dem die Entladung für immer kleinere Ladezeiten zustreben muß. Ein großer Vorteil dieser Methode wäre, daß sie frei ist von allen Störungen, die sonst durch die Aufladung (oder Entladung) der geometrischen Kapazität bedingt sind.

IV. *Integration bei exponentieller Darstellung für den Nachladestrom.* Die allgemeine Integration der Grundgleichung (3) ohne spezielle Annahmen über die Form der Funktion $\varphi(t)$ ist uns nicht gelungen. Da aber $\varphi(t)$ kontinuierlich abnehmend ist, wird man es immer durch eine Summe von Exponentialgliedern annähern können, wie dies auch schon vielfach bei theoretischen Überlegungen gemacht worden ist. Wir setzen also an

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{-\mu_i t}. \quad (6)$$

¹⁾ Die Größe des Einsatzstromes, dessen Kenntnis von wesentlichem theoretischen und praktischen Interesse ist, wird heute noch vielfach diskutiert. Vgl. hierzu O. Beran, F. Quittner, ZS. f. Phys. **64**, 760, 1930; F. Quittner, Phys. ZS. d. Sowjetunion **6**, 319, 1934; A. Goldhammer, A. Salessky, ebenda **5**, 523, 1934; A. Goldhammer, ebenda **5**, 553, 1934; W. Scislowski, Acta Phys. Pol. **4**, 123, 1935.

Dabei ist

$$\sum A_i = \varphi(0).$$

Die Größen A_i, μ_i, n sind dabei als durch das Experiment gegeben anzusehen.

Man wird für $U(t)$ eine ähnliche Darstellung ansetzen

$$U(t) = \sum_{x=1}^m U_x e^{-v_x t} \quad (7)$$

und die Koeffizienten v_x, U_x, m so zu bestimmen versuchen, daß die Gleichung (3) befriedigt ist. Einsetzen in (3) ergibt mit Berücksichtigung von (4)

$$\left. \begin{aligned} \sum_{x=1}^m U_x e^{-v_x t} \left[\left(\frac{1}{RC_0} - v_x \right) - \sum_{i=1}^n \frac{v_x A_i}{C_0 [\mu_i - v_x]} \right] + \sum_{i=1}^n A_i e^{-\mu_i t} \\ \left[f U_0 e^{-\mu_i t_0} + \sum_{x=1}^m \frac{U_x v_x}{\mu_i - v_x} \right] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Soll dieser Ausdruck jederzeit gleich 0 sein, so muß jedes Glied für sich verschwinden.

Es muß also sein:

$$\frac{1}{RC_0} - v - \sum_{i=1}^n \frac{v A_i}{(\mu_i - v) C_0} = 0, \quad (9a)$$

$$\sum_{i=1}^n \left[f U_0 e^{-\mu_i t_0} + \sum_{x=1}^m \frac{U_x v_x}{\mu_i - v_x} \right] = 0. \quad (9b)$$

Die erste Gleichung ist vom $(n+1)$ ten Grad in v . Man erhält also hieraus $(n+1)$ Werte v_x . Somit

$$m = n + 1. \quad (9c)$$

Sind die v bestimmt, so lassen sich aus dem System der n Gleichungen (9b) die Werte $U_1 \dots U_x \dots U_n$ in Funktion von U_m ausdrücken, das die Integrationskonstante darstellt und sich aus den Grenzbedingungen für $t=0$ ergibt [Gleichung (4)]. Die Gleichungen (9) stellen also das allgemeine Integral dar.

V. Diskussion des anomalen Verhaltens. Eine Diskussion unter Zugrundelegung der allgemeinen Gleichung (7) mit einer Reihe von Gliedern wäre sehr umständlich. Solange man jedoch nur qualitativ die Verhältnisse überschauen will, kann man sich in (6) mit einer einzigen Exponentialfunktion begnügen, wie dies bei der Diskussion der dielektrischen Verluste schon vielfach gemacht wurde.

$$\varphi(t) = \varphi(0) e^{-\mu t}. \quad (10)$$

Man erhält dann zwei Werte ν_1 und ν_2 als Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\frac{\varphi(0) \nu}{C_0 (\mu - \nu)} = \frac{1}{RC_0} - \nu. \quad (11)$$

Es sei $\nu_2 > \nu_1$. Dann folgt einfach die für das Folgende wichtige Beziehung (vgl. Fig. 2) [es mag noch bemerkt werden, daß die Koeffizienten in (11) natürlich alle positiv sind].

$$\nu_2 > \nu_1 : \nu_2 > \mu > \nu_1 > 0. \quad (12)$$

Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall der Wiederaufladung.

Wiederaufladung. Aus (9a), (9b) folgt:

$$U = U_0 \frac{\varphi(0) e^{-\mu t_0}}{C_0 (\nu_2 - \nu_1)} \cdot [e^{-\nu_1 t} - e^{-\nu_2 t}]. \quad (13a)$$

Die Faktoren im Nenner sind wegen (12) beide positiv. Gleichung (13a) zeigt, daß nach einem t_0 währenden Kurzschluß die Spannung wieder

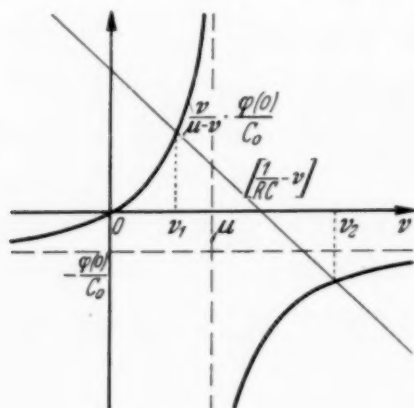


Fig. 2.

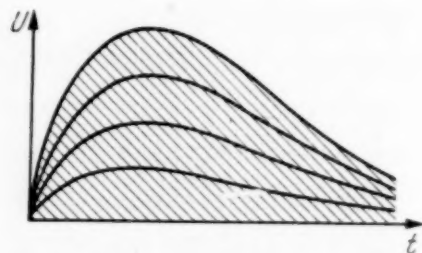


Fig. 3. Wiederaufstieg der Spannung nach einer vorübergehenden Verbindung der Belegungen. Die oberste Kurve stellt die Grenzkurve für eine extrem kurze Dauer der Verbindung dar.

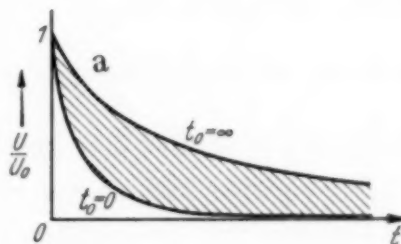
ansteigt, ein Maximum erreicht und dann langsam abfällt. Kurven für verschiedenes t_0 gehen durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor auseinander hervor (Fig. 3).

Und nun die *Entladung*. Man erhält

$$U = U_0 \frac{\varphi(0)}{C_0 (\nu_2 - \nu_1)} \left[\left(\frac{1}{\frac{\mu}{\nu_1} - 1} + e^{-\mu t_0} \right) e^{-\nu_2 t} + \left(\frac{1}{1 - \frac{\mu}{\nu_2}} - e^{-\mu t_0} \right) e^{-\nu_1 t} \right]. \quad (13b)$$

Auch hier sind die Faktoren wegen (12) positiv. Die Entladekurve setzt sich also gleichfalls aus *zwei* Exponentialfunktionen zusammen. Mit zunehmender Ladedauer wächst der Koeffizient des langsamer veränderlichen Gliedes $e^{-r_1 t}$ an, während der des schneller veränderlichen kleiner wird. Die Entladung geht also immer langsamer vor sich. Für ganz kurze und ganz lange Ladezeiten erhält man Grenzkurven. Bei beliebiger Ladedauer ist hinreichend lange Zeit nach Öffnen des Stromkreises das Glied $e^{-r_2 t}$ abgeklungen und der Verlauf praktisch durch $e^{-r_1 t}$ gegeben. In halblogarithmischer Skale erhält man also schließlich eine Schar paralleler Geraden.

a) Spannungsverlauf bei der Entladung. Die Entladedauer erhöht sich mit zunehmender Ladezeit. Die beiden Kurven stellen Grenzkurven für extrem kurze und extrem lange Ladezeit dar.



b) Logarithmische Darstellung des Spannungsabfalles. Hinreichend lange Zeit nach Freigeben der Belegungen ist der Spannungsverlauf für alle Kurven durch dasselbe Exponentialgesetz gegeben.

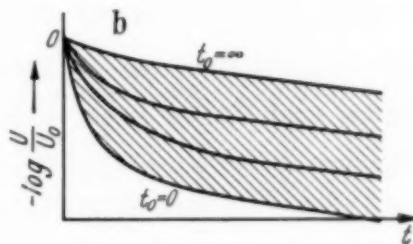


Fig. 4.

Die Zeitkonstante der Entladung ist hier jedoch *nicht* gleich der der geometrischen Kapazität, sondern größer als diese. Und aus einem einfach exponentiellen Abfall nach längerer Ladedauer läßt sich noch nicht folgern, daß der Kondensator keine Anomalien aufweist. Vielmehr kann das Glied $e^{-r_2 t}$ schon rasch abgeklungen sein.

Wesentlich für die Messung ist dann auch, daß man aus der Entladekurve nicht den wahren inneren Widerstand R erhält, besonders wenn die Kapazität etwa mit Wechselstrom gemessen wurde. Man erhält vielmehr

den Koeffizienten r_1 , und da $\frac{1}{r_1} > RC_0$, erhält man für R zu große Werte

(Fig. 4). Wir bemerken noch, daß die Formeln auch für den Grenzfall $R = \infty$ ohne weiteres gültig bleiben.

VI. Eine Näherungslösung für kurze Zeiten nach der Öffnung. In III. ist eine Diskussion des Verhaltens im Moment des Öffnens gegeben worden. Die Gleichungen gelten aber streng nur für $t = 0$. Nunmehr soll untersucht werden, wie sich der Verlauf der Spannung im Anschluß hieran entwickelt.

Diese Diskussion ist notwendig wegen des besonderen Verhaltens der Funktion φ im Ursprung und wird die in III. erhaltenen Resultate zum Teil einschränken.

Bei einer großen Zahl von Arbeiten hat sich ergeben, daß die Funktion $\varphi(t)$ in einem weiten Bereich sehr gut angenähert werden kann durch die Darstellung

$$\varphi(t) = \frac{\beta}{t^n} \quad (14)$$

mit $n < 1$; meist ist dabei n sehr nahe gleich 1. Man hat hiergegen eingewendet, daß sich für $t = 0$ der Wert $\varphi(0) = \infty$ ergibt, und daß $\int_0^\infty \varphi(t) dt = \infty$ wird. Für das folgende ist wesentlich jedoch nur $\int_0^t \varphi(t) dt$ für kleine Werte t ; und dies konvergiert wegen $n < 1$. Jedenfalls hat sich auch nach eigenen Messungen ergeben, daß besonders für kleine Werte t die Darstellung (14) am geeignetsten ist; sie soll also im folgenden zugrunde gelegt werden.

Wir beschränken uns zunächst auf den Grenzfall unendlich langer Ladezeiten und fragen nach dem Verhalten von $U(t)$ im Ursprung. Für $t \equiv 0$ ist dies durch (5a) gegeben. In Strenge gilt diese Gleichung nur eben für $t = 0$; der einfachen Messung zugänglich ist im allgemeinen jedoch dU/dt erst für t in der Größenordnung von 1 sec. Weist der hier gemessene Verlauf von U keine Unregelmäßigkeiten auf, so wird man geneigt sein, ihn in den 0-Punkt zu extrapolieren und den so bestimmten Wert als $\left. \frac{dU}{dt} \right|_0$ anzusehen. Dieses Verfahren ist aber natürlich nur zulässig, wenn die Kurve für $t \rightarrow 0$ sich normal verhält. In Wahrheit bringt nun der eigentümliche Verlauf der Funktion $\varphi(t)$ für kleine t eine Anomalie der Funktion $dU(t)/dt$ mit sich.

Mit (14) erhält man für die Entladung nach unendlich langer Ladung [mit $i_0(\infty) = 0$]

$$C_0 \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R} + \int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \frac{\beta}{(t-\tau)^n} d\tau = 0. \quad (15)$$

Wir betrachten das Integral in Gleichung (15). Bei der Berechnung des Funktionswertes im Punkt t gehen die sämtlichen Werte $dU/d\tau$ im Intervall $0 < \tau < t$ ein. Nun soll sich die Rechnung jedoch auf sehr kleine Zeiten t beschränken. Dann wird sich U und $dU/d\tau$ im betrachteten Intervall nur recht wenig ändern, im Gegensatz zu der Funktion $1/t^n$, deren

Hauptänderung gerade in der Nähe des 0-Punktes erfolgt. Man wird also keinen großen Fehler begehen, wenn man für $t \rightarrow 0$ anstatt mit $dU/d\tau$ mit dem Wert dU/dt am Ende des jeweiligen Intervalls multipliziert (Fig. 5). Dann wird

$$\int_0^t \frac{dU(\tau)}{d\tau} \frac{\beta}{(t-\tau)} n d\tau = \frac{dU}{dt} \int_0^t \frac{\beta}{(t-\tau)} n d\tau = \frac{dU}{dt} \frac{\beta}{1-n} t^{1-n} \quad (16)$$

und man erhält einfach

$$+ \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = - \frac{1}{RC_0 \left[1 + \frac{\beta}{(1-n)C_0} t^{1-n} \right]} \quad (17)$$

Die Abweichungen vom normalen Verhalten werden durch das Glied mit β gegeben. Da n sehr nahe an 1, ist $1-n$ sehr klein (von der Größenordnung 10^{-1}). Die Funktion t^{1-n} wird also innerhalb der ersten Sekunde von 0 auf 1 ansteigen und sich dann nur noch langsam ändern. Der Verlauf von t^{1-n} wird vielleicht am besten charakterisiert, wenn man sagt, es ist fast immer $= 1$. Die Steigung wird also innerhalb ganz kurzer Zeit von dem Wert $1/RC$ auf den kleineren Wert

$$- \frac{1}{U} \frac{dU}{dt} = \frac{1}{RC_0 \left[1 + \frac{\beta}{(1-n)C_0} \right]} \quad (17a)$$

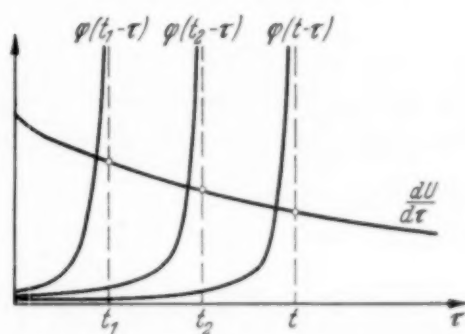


Fig. 5. Zur näherungsweisen Auswertung des Integrals 16.

abfallen. Dieser Abfall entgeht aber der Messung und so bestimmt man aus der gemessenen Kurve praktisch den Wert (17a).

Der Verlauf von $U(t)$ ergibt sich aus (17). Allerdings macht eine geschlossene Integration noch eine weitere Vernachlässigung erforderlich: Man sieht den Klammerausdruck als (fast immer!) langsam veränderlich an und zieht ihn vor das Integral. Damit wird

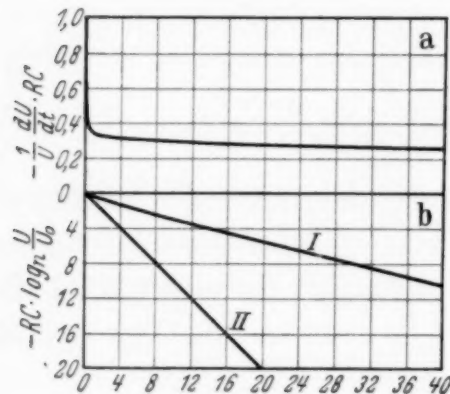
$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC_0 \left[1 + \frac{\beta}{(1-n)C_0} t^{1-n} \right]}} \quad (18)$$

Die Kurve für $U(t)$ selbst weist keine Unregelmäßigkeit auf, denn der Anstieg der Zeitkonstante geht so rasch vor sich, daß unterdes kein merklicher Abfall von U selbst stattgefunden hat.

Fig. 6 gibt diese Verhältnisse mit Werten für die Konstanten, die dem experimentellen Befund entsprechen.

Praktisch bedeutet dies also, daß man aus dem Anfangsteil von $U(t)$ nicht die wahre geometrische Kapazität erhält, sondern den größeren Ausdruck $C_0 + \frac{\beta}{1-n}$.

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch bei Zugrundelegung anderer Anfangsbedingungen anstellen. Man sieht, daß dann die Gleichungen



a) Neigung der Entladekurve kurz nach Freigeben der Belegungen. Die Kurve fällt innerhalb kürzester Zeit von dem Anfangswert 1 auf etwa 0,3 ab.

b) Verlauf der Spannung bei der Entladung kurz nach Freigeben der Belegungen. Kurve I: für den anomalen Kondensator. Kurve II: für einen Kondensator C_0 ohne Anomalien. Die Steigung der beiden Kurven im Ursprung ist identisch.

Fig. 6.

(5a) und (5b) formal bestehen bleiben, nur tritt an Stelle von C der obige Ausdruck; oder allgemein, man muß setzen

$$C_0 \rightarrow C_0 + \int_0^t \varphi(t) dt.$$

VII. Die Kapazitätswerte. Es mögen kurz einige Folgerungen besprochen werden, die bei Kapazitätsmessungen von meßtechnischem Interesse sind. Die Gesamtladung setzt sich aus der auf der geometrischen Kapazität befindlichen und der durch den Nachladestrom zugeführten Elektrizitätsmenge zusammen. Da letztere Funktion der Ladedauer ist, ist also auch die Gesamtkapazität zeitabhängig. Sie stellt sich bei Ladung mit konstanter Spannung als Summe von (konstanter) geometrischer und (zeitabhängiger) anomaler Kapazität dar:

$$\varphi = C_0 + C(t), \quad (19)$$

dabei ist $C(t)$ definiert als

$$C(t) = \int_0^t \varphi(t) dt. \quad (20)$$

Mit Einführung der „Polarisationskapazität“ $C(t)$ läßt sich auch die Grundgleichung (1), wie sich leicht sieht, auf die einfache Form bringen

$$J = \frac{U}{R} + \frac{dQ}{dt} \quad (1a)$$

mit

$$Q = C_0 U + \int_{-\infty}^t \frac{dU}{d\tau} C(t - \tau) d\tau, \quad (21)$$

Q stellt die Gesamtladung dar.

Es erscheint an dieser Stelle zweckmäßig, die verschiedenen Möglichkeiten zur Messung dieser Kapazitäten zu besprechen.

Die *geometrische Kapazität* C_0 erhält man exakt nur durch eine Messung mit Hochfrequenz; bei jeder anderen Methode, wie etwa bei der einfachen ballistischen, wird noch ein von der anomalen Kapazität herrührender Bestandteil mitgemessen; man erhält also einen zu hohen Wert.

Die *Gesamtkapazität* kann durch Planimetrierung einer Entladekurve (bei offenen Belegungen) ermittelt werden. Der in jedem Moment (irreversibel) sich ausgleichende Teil der Ladung ist gleich $dt U(t)/R$. Die gesamte Ladung, die sich angesammelt hatte, ist also gleich

$$Q = \frac{1}{R} \int_0^{\infty} U(t) dt. \quad (22)$$

Die *anomale Kapazität* allein erhält man durch Integration über den Entladestrom, von 0 bis ∞ . Solange jedoch der Einsatzstrom nicht bekannt ist, ergibt sich so nicht der Gesamtwert, sondern nur der Ausdruck

$$C(t) - C(t') = \int_{t'}^{\infty} \varphi(t) dt, \quad (23)$$

wobei t' der Zeitpunkt ist, von dem ab der Verlauf des Entladestromes der Messung zugänglich ist.

Die Bestimmung läßt sich aber ergänzen auf Grund von Gleichung (17a). Man ermittelt aus einer Entladekurve nach vollständiger Ladung die Steigung im Ursprung. Hieraus erhält man, nach VI., die geometrische

Kapazität, vermehrt um den Ausdruck $\int_0^1 \varphi(t) dt$. Es ist also

$$C_0 + C(1) = - \frac{1}{R} \left. \frac{U_0}{\frac{dU}{dt}} \right|_0. \quad (24)$$

B. Messung.

1. *Meßanordnung.* Die Ergebnisse der Rechnung wurden in einigen Messungen überprüft. Als Dielektrikum wurde hierbei — im wesentlichen aus äußeren Gründen — Telephondrahtisolierung aus vulkanisiertem Gummi

verwendet. Versuchskörper waren die Drahtrollen selbst. Sie wurden, wie es auch in der fabriktechnischen Kontrolle üblich ist, in ein Gefäß mit Wasser gelegt. Letzteres stellte die äußere Belegung dar, die beiden miteinander verbundenen Adern die innere.

Die Strommessungen wurden mittels eines Spiegelgalvanometers (10^{-10} Amp. Empfindlichkeit) vorgenommen, die Messungen des Spannungsverlaufs mit einem Einfadenelektrometer.

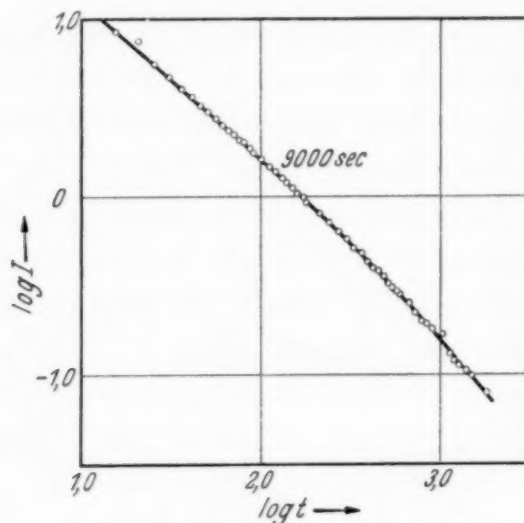


Fig. 7. Entladestrom in logarithmischer Darstellung. Der Verlauf ist zunächst in guter Annäherung linear, erst später erfolgt ein stärkerer Abfall, wie er wegen der zu fordernden Endlichkeit der Restladung zu erwarten ist. (Ladedauer 9000 Sek.)

des Integrals $\int_0^{\infty} \varphi(t) dt$ zu erwarten ist. Das Ergebnis steht durchaus in Einklang mit Kurven, die von Wagner (l. c.) an Drahtisolierung aus imprägniertem Papier erhalten worden sind.

Für den linearen Teil erhält man also die Darstellung (14)

$$\varphi(t) = \frac{\beta}{t^n}$$

mit den Werten der Koeffizienten

$$n = 0,9,$$

$$\beta = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Amp./100 m.}$$

Für den Dauerwiderstand ergab sich

$$R = 10^{10} \Omega/100 \text{ m.}$$

3. Gültigkeit des Superpositionsprinzips. Die wesentliche Voraussetzung der ganzen Rechnung ist die Gültigkeit des Superpositionsprinzips

2. Form des Nachladestromes. Zunächst war die Form der Funktion $\varphi(t)$ festzustellen. Dies geschah durch Messung des Entladestromes nach hinreichend langer Ladung mit konstanter Spannung. Fig. 7 gibt den Stromverlauf in logarithmischem Maßstab. (Die Spannung bei der Messung betrug 440 Volt, Einheit der Zeit 1 sec, Einheit für den Strom $7 \cdot 10^{-9}$ Amp.) Nach einem anfänglich fast linearen Verlauf tritt später ein wesentlich stärkeres Absinken des Stromes ein, wie es ja auch wegen der Endlichkeit

bei diskontinuierlichen Spannungsänderungen. Dies wurde in verschiedener Weise geprüft und stets bestätigt gefunden. Als Beispiel gibt Fig. 8 eine Messung des Entladestromes für verschiedene Ladezeiten (die jeweils angeschrieben sind). Ersichtlich ist der Endzustand nach etwa 2 Stunden

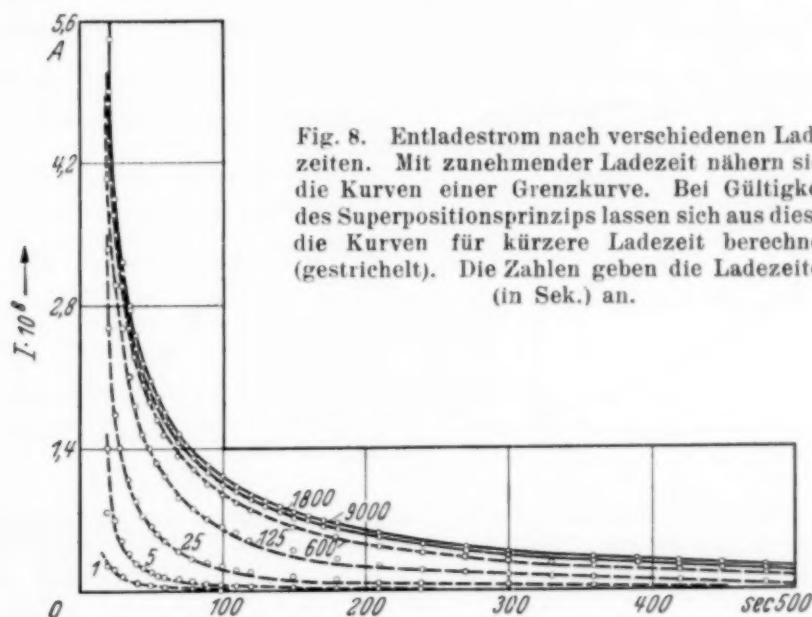


Fig. 8. Entladestrom nach verschiedenen Ladezeiten. Mit zunehmender Ladezeit nähern sich die Kurven einer Grenzkurve. Bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips lassen sich aus dieser die Kurven für kürzere Ladezeit berechnen (gestrichelt). Die Zahlen geben die Ladezeiten (in Sek.) an.

erreicht. Die Stromkurve für diese Ladezeit stellt also $i_{\infty}(t)$ dar. Die Entladekurve für beliebige Ladezeit t_0 erhält man bei Gültigkeit des Superpositionsprinzips hieraus einfach als

$$i_{t_0}(t) = i_{\infty}(t) - i_{\infty}(t + t_0).$$

Die gestrichelten Kurven wurden auf diese Weise berechnet. Sie stellen die Meßpunkte gut dar.

4. *Das Verhalten beim Öffnen.* Die obigen Messungen erweisen die Gültigkeit der Voraussetzungen, auf denen sich unsere Betrachtungen aufbauen. Es bleibt noch zu zeigen, daß der Spannungsverlauf bei isolierten Belegungen auch wirklich dem berechneten entspricht. Zunächst wurde der Spannungsverlauf in der ersten Minute nach Öffnen des äußeren Stromkreises untersucht, für die beiden Fälle von Entladung und Wiederaufladung, die oben behandelt wurden.

Fig. 9 gibt den Anfangsteil der Entladekurven bei verschiedenen Ladezeiten t_0 . Der Spannungsabfall ist für kleines t_0 sehr steil, verlangsamt sich dann aber rasch. Bei wachsenden t_0 nähern sich die Kurven einem Grenzwert, entsprechend Gleichung (5a).

In der Nähe des 0-Punktes zeigen die Kurven keinerlei Besonderheit; die Steigung läßt sich also hier in einiger Annäherung durch Extrapolation bestimmen¹⁾).

Fig. 10 gibt diese in Funktionen der Ladezeit, in logarithmischem Maßstab. Hier sieht man deutlich das Konstantwerden für Ladezeiten

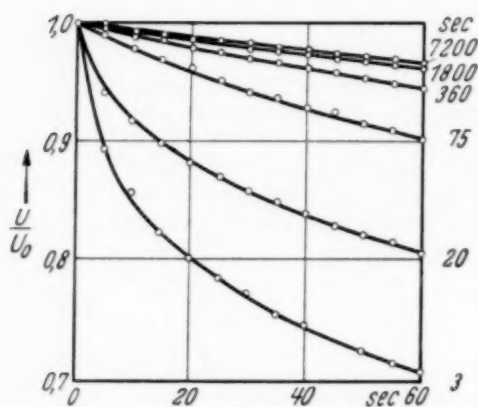


Fig. 9. Anfangsteil der Entladekurven für zunehmende Ladezeiten. (Zahlen am Rand: Ladezeiten.)

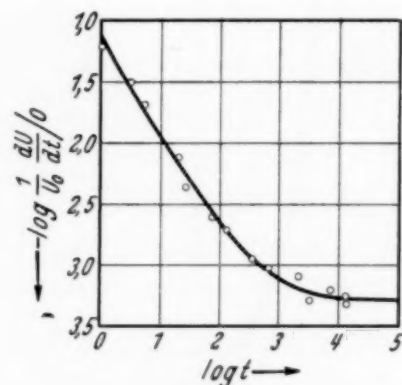


Fig. 10. Steigung der Entladekurven im Ursprung in Funktion der Ladezeit.

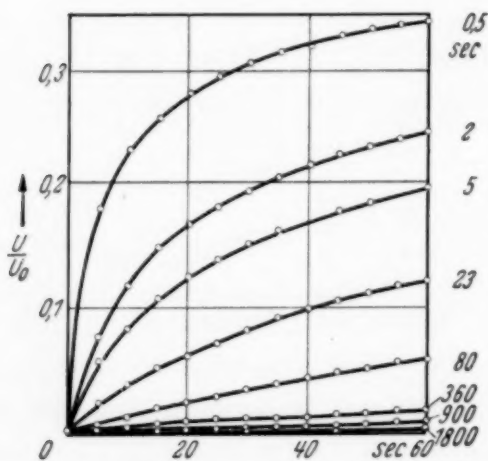


Fig. 11. Anfangsteil der Wiederaufladekurven. Die Zahlen am Rand geben die Zeit, während deren die Belegungen verbunden waren.

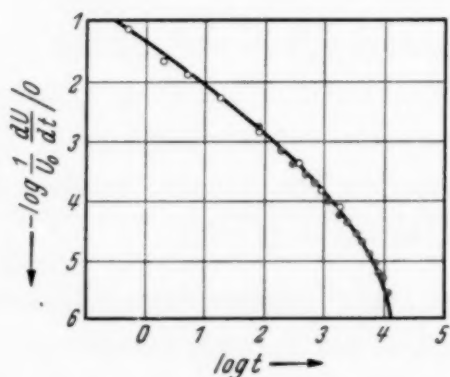


Fig. 12. Steigung der Wiederaufladekurven im Ursprung, in Funktion der Kurzschlußdauer. Die Kurve zeigt denselben Verlauf wie die Kurve des Nachladestromes.

$t_0 > 2$ Stunden; dies entspricht also der Dauer, die zur völligen Ladung benötigt wird.

¹⁾ Nach (VII) unterscheidet sich der so bestimmte Wert von der wahren Steigung im Ursprung um einen annähernd konstanten Faktor.

Den *Spannungsanstieg* nach vorübergehendem Kurzschluß gibt Fig. 11. Die Kurven stellen im wesentlichen ein Spiegelbild der Verhältnisse bei der Entladung dar; für steigende Entladedauer fällt jedoch die Steigung auf 0 ab.

Fig. 12 gibt wieder die Steigung im Ursprung, die durch Extrapolation bestimmt wurde, in Funktion der Entladedauer, im logarithmischen Maßstab.

Nach Gleichung (5b) muß diese Kurve denselben Verlauf zeigen wie die des Nachladestromes. Ein Vergleich mit Fig. 7 zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Die Messungen entsprechen also bisher ganz dem Verhalten, das durch Gleichung (5a) und (5b) beschrieben ist.

Bemerkenswert ist jedoch, daß in dem untersuchten Zeitintervall ein Grenzwert bei abnehmender Lade- bzw. Entladedauer, wie er nach den Gleichungen (5) zu erwarten ist, nicht auftritt und auch nur eine Annäherung an einen solchen keineswegs angedeutet ist. Dies bedeutet, daß der Anstieg der Funktion $\varphi(t)$ auch für Zeiten kleiner als 1 sec sich ungestört fortsetzt, der Einsatzstrom selbst also noch nicht bestimmt werden kann. Vorläufige Messungen, die sich bis zu $2/1000$ sec erstreckten, haben dies bestätigt.

5. Wiederaufladung. Fig. 13 gibt den Spannungsverlauf nach aufgehobener Erdung; auch diese Kurven entsprechen dem nach Gleichung (13a) berechneten Verlauf.

6. Entladung. Schließlich gibt Fig. 14 noch zwei vollständige Entladekurven. Ihr Verlauf wird qualitativ durch Gleichung (13b) beschrieben. Die Fig. 14a und 14b geben jeweils den Anfangsteil der beiden Kurven in vergrößertem Maßstab. Ersichtlich ist auch hier der Kurvenverlauf durchaus stetig und eine Bestimmung der Steigung im Ursprung scheint ohne weiteres möglich. Berechnet man jedoch hiermit nach Gleichung (5) den Kapazitätswert, so erhält man hier $C' = \frac{U_0}{R} \left/ \frac{dU}{dt} \right|_0 = 5,4 \cdot 10^{-8} \text{ F}$, während eine direkte Messung mit 50periodigem Wechselstrom den viel kleineren Wert von $C'' = 2,1 \cdot 10^{-8} \text{ F}$ ergab.

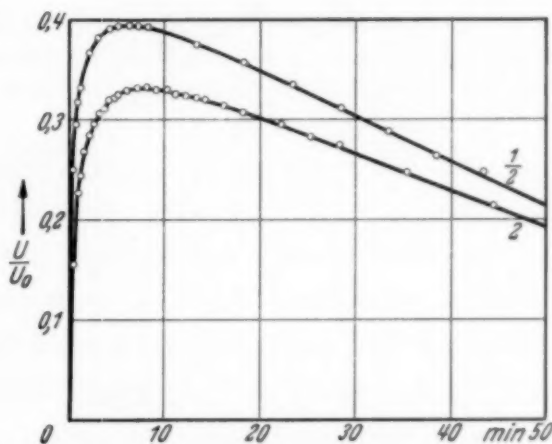


Fig. 13. Wiederaufladung nach einem 2 Sek. und einem $1/2$ Sek. währenden Kurzschluß.

Bei sämtlichen Messungen, die wir so ausgewertet haben, hat sich eine Diskrepanz im obigen Sinne ergeben. Dies zeigt klar, daß C' nicht die Bedeutung der geometrischen Kapazität haben kann (die ja einen unteren Grenzwert darstellt), sondern noch einen weiteren Anteil enthält. Da der

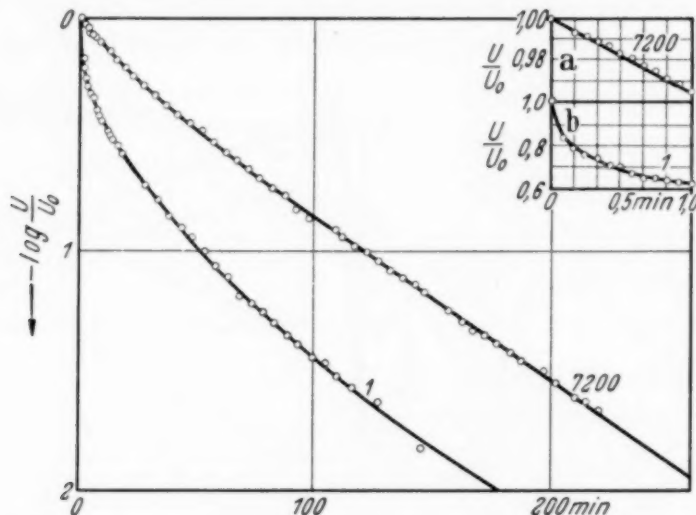


Fig. 14. Entladekurven für 1 Sek. und für 2 Std. Ladedauer. Die letztere Kurve zeigt im wesentlichen exponentiellen Abfall, die erstere fällt zunächst viel schneller ab, verläuft aber später der ersteren nahezu parallel. Die Fig. a und b geben den Anfangsteil der beiden Kurven.

Wert von R sich mit ziemlicher Genauigkeit bestimmen läßt, kann dies nur dadurch zustande kommen, daß der durch Extrapolation bestimmte Wert von $\left. \frac{dU}{dt} \right|_0$ nicht gleich der wahren Steigung im Ursprung ist, sondern kleiner. Dies ist jetzt ohne weiteres verständlich auf Grund der in VI. gegebenen Diskussion.

Herrn Prof. Dr. E. L. da Fonseca Costa danke ich für seine stete Anteilnahme und die Förderung, die er der Arbeit zuteil werden ließ. Herrn Dr. P. S. Rocha danke ich für seine eingehende Diskussion und Kritik der theoretischen Grundlagen.

Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Tecnologia do Ministerio do Trabalho, Juni 1937.

Untersuchung der Glühemission am einzelnen Elektron durch eine proportionale Doppelverstärkeranordnung¹⁾.

Von Ernst Hans Winkler in Halle.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Juli 1937.)

Mit einer Doppelverstärkeranordnung werden an einem Platindraht von 0,1 mm Durchmesser Eintritt und Temperaturabhängigkeit der Emission untersucht. Das Richardsonsche Gesetz wird im Gebiet einzelner Elektronen bestätigt.

Einleitung. Die Doppelverstärkeranordnung benutzt das von Zipprich²⁾ angegebene Verfahren, irgendwie erzeugte Ionenmengen durch Stoßionisation bis zum Faktor 10^4 zu verstärken. Durch definierte Ionisationsstrecken und homogenes elektrisches Feld wird dabei unterhalb der Entladungsgrenze proportionale Verstärkung erzielt. Das Wesentliche dieser Anordnung ist die Verwendung eines aus nebeneinanderliegenden dünnen Drähten gebildeten Gitters, welches das beschleunigende elektrische Feld begrenzt und zugleich gestattet, daß die Ionen, die im Raum über dem Gitter gebildet, durch den Durchgriff in das Feld hineingezogen werden. Bei genügend hoher Empfindlichkeit des Elektrometers würde diese Verstärkung bereits ausreichen, einzelne Elektronen nachzuweisen, wenn nicht α - und β -Teilchen als Verseuchungsteilchen in großer Anzahl vorhanden wären. Zwar lassen sich die von Spuren radioaktiver Substanzen an den Kammerwänden herrührenden α -Teilchen noch weitgehend durch gründliches Reinigen entfernen, nicht aber die β -Teilchen, die wahrscheinlich durch die Umgebungsstrahlung oder Höhenstrahlen aus dem Material ausgelöst werden. Die ersteren stören durch ihr hohes Ionisationsvermögen, die letzteren durch ihre große Anzahl, so daß der geringe Effekt eines austretenden Elektrons nicht mit genügender Sicherheit herausgefunden werden kann. Diese Störteilchen müssen also, wenn möglich, ganz ausgeschaltet werden, indem die Quelle dieser Teilchen, nämlich die über dem Gitter liegende Ionisationskammer, vermieden und auch der übrige Aufbau entsprechend günstig eingerichtet wird. Daher mußte die Anordnung mit dem Durchgriff verlassen werden und das beschleunigende Feld direkt an die Elektronenquelle, den Glühdraht, angelegt werden. Wählt man eine

¹⁾ Über die Doppelverstärkeranordnung zum Nachweis einzelner Elektronen wurde bereits auf der Gau-Physiker-Tagung in Halle (Juni 1936) berichtet. Siehe Phys. ZS. **37**, 557, 1936. — ²⁾ B. Zipprich, ZS. f. Phys. **96**, 328, 1935.

zylinderförmige Anordnung als Gegenelektrode zum Glühdraht, so durchlaufen auch hier alle austretenden Elektronen die gleichen Ionisationswege und werden proportional verstärkt. Man könnte sich einen solchen Aufbau einfach durch einen in einer zylinderförmigen Bohrung ausgespannten und elektrisch heizbaren Draht, dem ein passend gewählter, in die Wand eingelassener Auffänger gegenübersteht, verwirklicht denken, wobei zwischen Draht und Zylinderwandung eine beschleunigende Spannung liegen müßte.

Nach der Townsendschen Theorie der Stoßionisation sowie nach den Beobachtungen von Zipprich¹⁾ setzt aber bei einem Verstärkungsgrad von mehr als 200 eine Oberflächenionisation der positiven Ionen ein. Die Feldstärke ist dann so groß, daß die positiven Ionen auf ihren freien Weglängen eine genügende Geschwindigkeit erlangen, um beim Aufprallen auf die Drahtoberfläche Elektronen auszulösen. Eine proportionale Verstärkung ist dann aber unmöglich.

Dieser ungünstige Umstand läßt sich dadurch umgehen, daß die zylinderförmige Strecke nur als Vorverstärker mit einem Verstärkungsfaktor von weniger als 200 benutzt wird. Die Verstärkung bleibt dann eine reine Elektronenverstärkung ohne die Mitwirkung der positiven Ionen, die die Glühdrahtoberfläche verändern könnten. Die nötige hohe Verstärkung muß dann durch eine zweite Strecke, die in ihrem Aufbau der Anordnung von Zipprich gleicht, erreicht werden (Fig. 1). Beide Strecken werden elektrisch voneinander durch ein dazwischenliegendes Gitter getrennt, so daß sich auch ihre Verstärkungsfaktoren unabhängig voneinander durch Variieren der beschleunigenden Spannung beliebig verändern lassen. Der gesamte Verstärkungsgrad ergibt sich dabei durch Multiplikation der Verstärkungsfaktoren beider Strecken. Die für die einzelnen Elektronen erforderliche Verstärkung von etwa 200000 kann somit getrennt und damit leichter und genauer bestimmt werden.

Vorteile der Anordnung. Außer diesem obengenannten Vorteil ergeben sich aus der Aufteilung und zylindrischen Anordnung der Ionisationsstrecke noch weitere. So wird durch das elektrische Feld eine bequeme Ausblendung (siehe Fig. 1) einer sehr kleinen zu untersuchenden Drahtoberfläche erreicht, die durch einen Auffänger von geringen Ausmaßen noch weiter verkleinert werden kann. Bei dem zur Messung verwendeten Auffänger von $1,80 \times 2,30 \text{ mm}^2$ Größe beträgt die untersuchte Drahtoberfläche $0,046 \text{ mm}^2$ und der wirksame Raum, in dem sich die Stoßionisation abspielt, nur

¹⁾ B. Zipprich, l. c.

19 mm³. Durch diese außerordentlich kleinen Abmessungen des empfindlichen Raumes konnte der störende Einfluß der Verseuchungsteilchen fast ganz beseitigt werden.

Dazu kommt der günstige Feldverlauf um den Draht herum, indem die geringe Verstärkung der ersten Strecke infolge des großen Potentialgefälles am Draht nur in geringer Entfernung von diesem stattfindet, so daß allein die den Draht verlassenden Elektronen die höchste Verstärkung erfahren. Weiter entfernt zufällig vorbeifliegende Verseuchungsteilchen werden dann nicht so hoch oder kaum verstärkt und unterscheiden sich durch ihre kleinere Ausschlagsgröße von den Glühelctronen. Endlich nimmt dadurch, daß der über dem Gitter liegende keilförmige Ionisationsraum nach dem Glühdraht zu immer schmaler wird, auch die Wahrscheinlichkeit, daß hier ein Störteilchen auftritt, ab. Insgesamt wurde durch diese Anordnung die Anzahl der Verseuchungsteilchen von weit über 100, und zwar vorwiegend β -Teilchen, auf ein bis zwei Teilchen in der Stunde herabgedrückt. Durch geeignete Wahl der Elektrometerempfindlichkeit und der Verstärkungsfaktoren konnte die Ausschlagsgröße dieser Teilchen auf 1 mm beschränkt werden, während die Glühelctronen gleichzeitig einen Ausschlag von 4 mm ergaben.

Die geringe Verstärkung der ersten Strecke hat schließlich den Vorteil, daß Unebenheiten in der Glühdrahtoberfläche sich nicht so sehr durch ihre Spitzenwirkung bemerkbar machen, wie bei hoher Feldstärke. Würde nur eine beschleunigende Strecke verwendet, so müßte die Spannung so hoch liegen, daß eine entstehende Feldemission, die noch nicht bei Zimmertemperatur, aber doch vielleicht bei höherer Temperatur einsetzt, das Versuchsergebnis fälschen könnte. Zumindest würden dann Oberflächenunebenheiten einerseits eine viel höhere Verstärkung für ein Elektron ergeben, das sich an einer Spitze loslöst, und dazu würde der dort sehr große Potentialgradient das Austreten der Elektronen in nicht berechenbarer Form erleichtern. Wie weit die Unebenheiten der Oberfläche den Elektronenaustritt und die Proportionalität beeinflussen, soll später an Hand von Registrierungen gezeigt werden.

Bau des Verstärkers. Den Aufbau der Verstärkeranordnung in zwei zueinander senkrechten Schnitten und die Kammer außerdem noch in der Ansicht von unten zeigt Fig. 1. In einem viereckigen Messingstück von $50 \times 20 \times 12$ mm Kantenlänge wurde in der Längsrichtung eine Bohrung von 9 mm Durchmesser exzentrisch so angebracht, daß auf der einen Seite eine möglichst dünne Wand von etwa 0,1 mm stehenblieb. Auf dieser Seite des Stückes und genau in der Mitte ist eine viereckige Öffnung *O* von 4×6 mm² ausgefeilt und schließlich die Kammer von außen mit dünnem

Draht umwickelt, so daß über der Öffnung ein engmaschiges Drahtgitter gebildet wird. Der verwendete Draht hatte einen Durchmesser von 0,03 mm und wurde auf der Drehbank mit $\frac{1}{6}$ mm Steigung direkt auf das Messingstück aufgewickelt, wodurch ein engmaschiges, regelmäßiges und fest aufliegendes Gitter entstand.

Axial in der Bohrung ist der auf seine Emission zu untersuchende Draht, ein Platindraht von 0,1 mm Durchmesser, isoliert durch die beiden Hartgummistücke *H* und befestigt an den kupfernen Zuführungen *Z*,

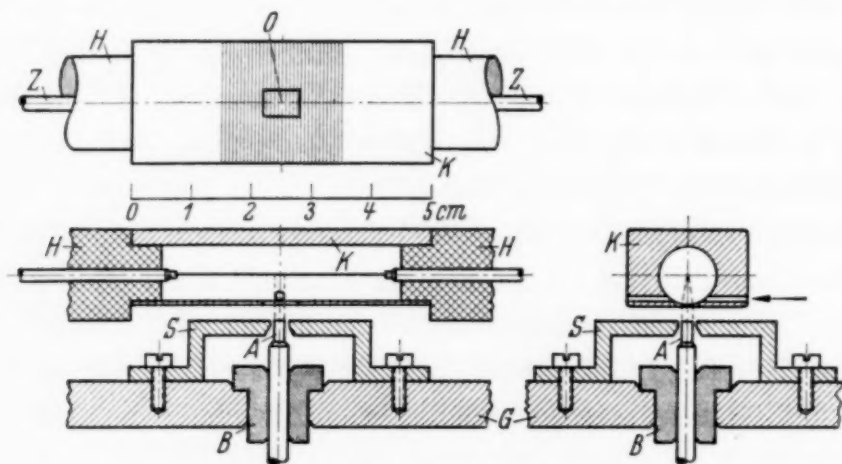


Fig. 1. Aufbau des Verstärkers.

K Kammer, *H* Hartgummiisolatoren, *Z* Heizstromzuführungen zugleich Halter des Drahtes, *A* Auffänger, *S* Schutzringkondensator, *B* Bernsteinisolator, *G* Grundplatte.*

angebracht. Nicht eingezeichnet in die Figur ist eine Spiralfeder, die an einem der Haltestäbe *Z* angreift und dafür sorgt, daß auch im erwärmten Zustand der Draht immer gespannt und damit genau in der Mitte der Bohrung verbleibt. Schließlich sind beide Halter mit starken Kupferdrähten, die der Heizstromzufuhr dienen, verbunden und in Hartgummi isoliert durch die Grundplatte *G* geführt. Auf gleiche Art ist eine leitende Verbindung mit der Kammer *K* durch die Grundplatte hergestellt. Der Glühdraht liegt an — 550 Volt und das Gitter an — 350 Volt. Diese Strecke dient der Vorverstärkung der Elektronen.

Mit der Öffnung nach unten wurde diese Kammer parallel zu dem Schutzringkondensator *S* und isoliert von ihm in einer Entfernung von etwa 3 mm angeordnet. Durch Dazwischenlegen schmalen Streifen einer 3 mm starken Spiegelglasplatte wurde die Kammer parallel zum Schutzringkondensator *S* gemacht und dann von oben durch Federkraft aufgedrückt. In der Mitte dieses Schutzringes ist der Auffänger *A* von der Größe $1,80 \times 3,20 \text{ mm}^2$ isoliert durch einen Zwischenraum von 0,06 mm eingelassen. Schutzring und Auffänger wurden sorgfältig zusammen abgeschliffen, um

sie möglichst in eine Ebene zu bringen. Der Auffänger steht in direkter Verbindung mit einem Vakuum-Duantenelektrometer¹⁾ und ist durch den Bernsteinisolator *B* durch die Grundplatte *G* geführt. Der Raum zwischen Gitter und Schutzringkondensator wird zur zweiten Verstärkung verwandt, indem der Schutzring geerdet und am Gitter — 350 Volt angelegt wird.

Um den für die Stoßionisation erforderlichen Unterdruck herzustellen, wurde der bisher beschriebene Aufbau zusammen mit einem Poloniumpräparat, auf dessen Verwendung später eingegangen werden soll, durch eine Kupferhalbkugel von 20 cm Durchmesser luftdicht abgeschlossen. Durch ein zugeschaltetes Ausgleichsgefäß von 15 Liter Inhalt konnte der Druck leichter konstant gehalten werden. An einem nach oben verlängerten McLeod-Manometer wurde der Druck auf $\frac{1}{10}$ mm genau eingestellt und beobachtet.

Zur Erzeugung des hohen Feldes wurden eine Reihe von Pertrix-Anodenbatterien von je 150 Volt verwendet, die, da sie niemals auf Strom beansprucht wurden und auch längere Zeit lagern, eine sehr gute Spannungs Konstanz aufwiesen. Besondere Bedeutung kommt der Spannungsmessung zu, weil, wie Zipprich gezeigt hat, der Verstärkungsfaktor von der Feldstärke exponential abhängig ist. Die Messung und die Kontrolle der Konstanz der Spannung muß elektrostatisch erfolgen, um nicht die Batterien durch Stromentnahme zu belasten, und muß sehr empfindlich sein. Dementsprechend wurde die Kompensationsmethode nach Heß²⁾ verwandt, die die Spannung auf $1\frac{0}{100}$ ihres Wertes konstant zu halten gestattet.

Temperaturmessung. Zum Zwecke der Temperaturmessung bildeten der Glühdraht und ein kleiner Widerstand von 0,5 Ohm einen Zweig einer Wheatstoneschen Brücke, der gleichzeitig vom Heizstrom durchflossen wurde. Die beiden anderen, von denen der eine 950 Ohm und der andere ein Dekadenwiderstand war, sind rund 1000mal größer, so daß praktisch der gesamte Strom durch den Heizdraht floß. Den Heizstrom lieferten vier Akkumets, von denen je zwei parallel geschaltet waren und die durch ständige Speisung über ein Trockengleichrichtersystem aus dem Netz auf konstanter Spannung gehalten wurden. In Verbindung mit einem Spiegelgalvanometer konnte die Temperatur auf $\frac{1}{10^0}$ konstant gehalten werden.

Aus der Umrechnung der Widerstandsänderung ergibt sich eine Durchschnittstemperatur, die einer gleichmäßigen Wärmeverteilung über die ganze Länge des Drahtes entspricht. Aus dieser muß die Temperatur

¹⁾ G. Hoffmann, Phys. ZS. **37**, 35, 1936; B. Zipprich, ebenda **37**, 36, 1936. — ²⁾ E. Hess, Phys. ZS. **83**, 698, 1933.

der Drahtmitte, deren Emission allein untersucht wird, unter Berücksichtigung der Wärmeableitung an den Haltedrähten, dem Wärmeübergang auf das umgebende Glas und Gefäß und der Änderung des spezifischen Widerstandes des Platins mit der Temperatur ermittelt werden. Der Einfluß der Wärmestrahlung kann bei der niedrigen Temperatur von etwa 600° vernachlässigt werden.

Die durch den Strom zugeführte Wärmemenge beträgt pro Längeneinheit

$$Q = \frac{i^2 \varrho t}{q} \text{ Wärmeeinheiten,}$$

worin i = Stromstärke, ϱ = spez. Widerstand, t = Zeit und q = Querschnitt ist.

Durch Wärmeableitung an den Haltedrähten gehen nach dem Wärmeleitungsgesetz

$$Q_1 = -\lambda q \frac{d^2 T}{dx^2} t \text{ Einheiten}$$

verloren (λ = Wärmeleitfähigkeit). Dabei ist die Temperatur der Haltedrähte gleich der Zimmertemperatur gesetzt, was bei einer Temperatur von 600° C und bei dem zwanzigfachen Durchmesser der Halter gegenüber dem Glühdraht fast ganz ohne Fehler ist. Der Wärmeverlust der Oberfläche des Drahtes ist

$$Q_2 = -\alpha F T t \text{ Wärmeeinheiten.}$$

Hierin ist α eine Funktion der Wärmeleitzahl des Gases, der Gefäßform, der Dichte, der Zähigkeit, der spezifischen Wärme und der Konvektion¹⁾.

Wegen $Q = Q_1 + Q_2$ ist nun

$$-\lambda q \frac{d^2 T}{dx^2} t + \alpha F T t = \frac{i^2 \varrho t}{q}.$$

Dabei ist aber ϱ selbst wieder eine lineare Funktion von T , also $\varrho = ft$. So ergibt sich:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{T(\alpha F + i^2 f q^{-1})}{\lambda q},$$

also mit $C = \frac{\alpha F + i^2 f q^{-1}}{\lambda q}$:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -C T.$$

Für die Temperatur erhält man also eine kosinusförmige Verteilung:

$$T = T_{\max} \cos x \sqrt{C},$$

¹⁾ W. Weizsäcker, Phys. ZS. 37, 644, 1936.

wobei T_{\max} die Maximaltemperatur der Mitte des Glühdrahtes ist. Die Temperatur der Drahtmitte bestimmt sich dann aus der durch die Widerstandsänderung berechneten Temperatur T zu

$$T_{\max} = \frac{\pi}{2} T = 1,57 T.$$

Beweis der Multiplikation der Verstärkungsfaktoren. Zum Beweis der Multiplikation der Verstärkungsfaktoren beider Strecken wurde die Kammer auf einen Druck von 30 mm ausgepumpt und die Abhängigkeit des Verstärkungsgrades von der Spannung aufgenommen. Die zu verstärkenden Elektronen lieferte der Draht selbst, indem er so weit geheizt wurde, bis sich im Elektrometer ein langsamer Gang bemerkbar machte. Dabei lag eine Spannung von 20 Volt an jeder Verstärkerstrecke. Diese reicht zwar nicht aus, um Stoßionisation zu bewirken, genügt aber, um die Elektronen zum Auffänger hinzuziehen und auf ihm abzuschneiden. An der unteren homogenen Verstärkerstrecke wurde dann die Spannung immer um 20 Volt erhöht und jedesmal der Gang des Elektrometers abgestoppt. Die erste Verstärkerstrecke behielt dabei stets 20 Volt Spannung, sorgte also nur für

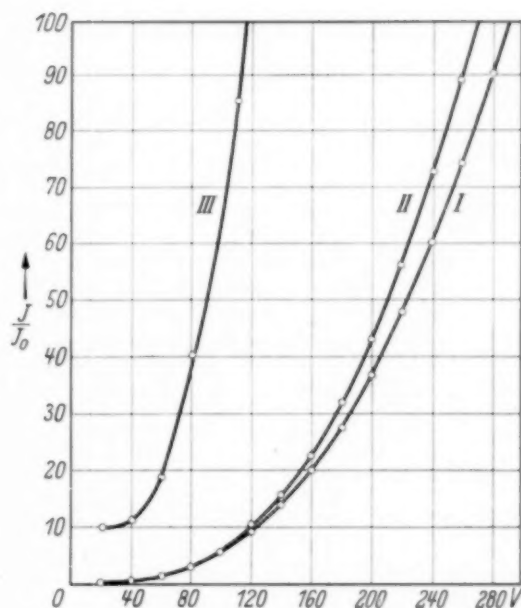


Fig. 2. Abhängigkeit der Verstärkungsfaktoren der Ionisationsstrecken von der Spannung und Beweis der Multiplikation.

die Zuleitung der Elektronen und war an der Verstärkung unbeteiligt. Aus dem Verhältnis zum ursprünglichen Gang ergab sich der Verstärkungsgrad der zweiten Strecke in Abhängigkeit von der Spannung (Fig. 2, Kurve I). Auf der Abszisse ist die Spannung, auf der Ordinate die Größe des Ganges und der Verstärkungsgrad aufgetragen. Kurve II zeigt entsprechend die Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors der ersten zylinderförmigen Strecke von der Spannung, zu dessen Bestimmung deren Spannung um jedesmal 20 Volt erhöht wurde, während jetzt die der unteren homogenen Strecke unverändert auf 20 Volt blieb. Beide Kurven sind natürlich entsprechend den anderen Feldverteilungen verschieden.

Für den Beweis der Multiplikation wurde nun an beiden Strecken eine Spannung angelegt, die zur Stoßionisation in ihnen ausreicht und deren

Verstärkung aus den aufgenommenen Kurven bekannt ist. Aus dem Verhältnis des jetzt beobachteten Ganges zu dem ohne Verstärkung übriggelassenden ergibt sich tatsächlich ein Verstärkungsgrad, der mit den, durch Multiplikation der aus den Kurven abgelesenen Faktoren, berechneten übereinstimmt. Um den Beweis in einer Kurve zeigen zu können, wurde die Verstärkung der unteren homogenen Strecke durch Anlegen einer Spannung von 145 Volt (siehe Kurve I) auf den Wert 10 gebracht, konstant gehalten und nun die Spannung der nicht homogenen ersten Strecke um je 20 Volt erhöht. Kurve III ist das Ergebnis. Man erkennt durch Vergleich von Kurve III mit Kurve II, daß bei gleichen Abszissen, also gleichen Spannungen in der zylinderförmigen Strecke die Ordinaten und damit auch die Verstärkungsgrade im Verhältnis 1 : 10 stehen.

Bestimmung des hohen Verstärkungsgrades. Diese Kurven, die nur dem Beweis der Multiplikation dienten, wurden bei 30 mm Luftdruck ermittelt, während die Untersuchung der Platinemission bei 10 mm erfolgte. Bei diesem Druck Kurven aufzunehmen, hatte bei einem Gesamtverstärkungsgrad von 200000 und bei der doppelt exponentiellen Abhängigkeit der Stoßionisation von Druck und Feldstärke keinen Sinn. Daher mußten die Faktoren der Strecken unmittelbar vor jeder Messung ermittelt und darauf geachtet werden, daß die Versuchsbedingungen konstant blieben. Der Faktor der ersten Strecke mit einem Wert von 200 wurde stets auf die oben beschriebene Art durch Gangmessung festgestellt. Für die zweite Strecke mit dem Faktor 1000 mußte die Bestimmung auf anderem Wege erfolgen. Sie gelang sehr genau und einfach durch eingeschossene α -Teilchen, deren abgeschiedene Ionenmengen auf der bekannten Ionisationsstrecke über dem Auffänger bei jedem Druck berechnet werden können. Zu diesem Zweck wurde die Kammer mit einer seitlichen Bohrung von 2 mm Durchmesser versehen und in Richtung des Pfeiles der Fig. 1 α -Teilchen senkrecht über dem Gitter, welches das untere Feld begrenzt, eingestrahlt. Die α -Teilchen werden von einem Poloniumpräparat ausgesandt, dessen Teilchen durch eine von außen magnetisch umlegbare Blende auch wieder ausgeschaltet werden können. Die Ausmessung des Verstärkungsgrades geschah mit Hilfe einer Registrierung der eingeschossenen α -Teilchen, indem etwa 100 Teilchen auf ihre Ausschlagsgröße bestimmt wurden. Die Ermittlung des Verstärkungsgrades durch die Ausschlagsgröße der Teilchen konnte mit oder ohne angelegtem Feld an der zylinderförmigen Strecke erfolgen, ohne daß sich Unterschiede zeigten. Hierdurch bestätigt sich, daß die positiven Ionen, wie an früherer Stelle behauptet wurde, keine Elektronen durch Oberflächenionisation am Draht befreien

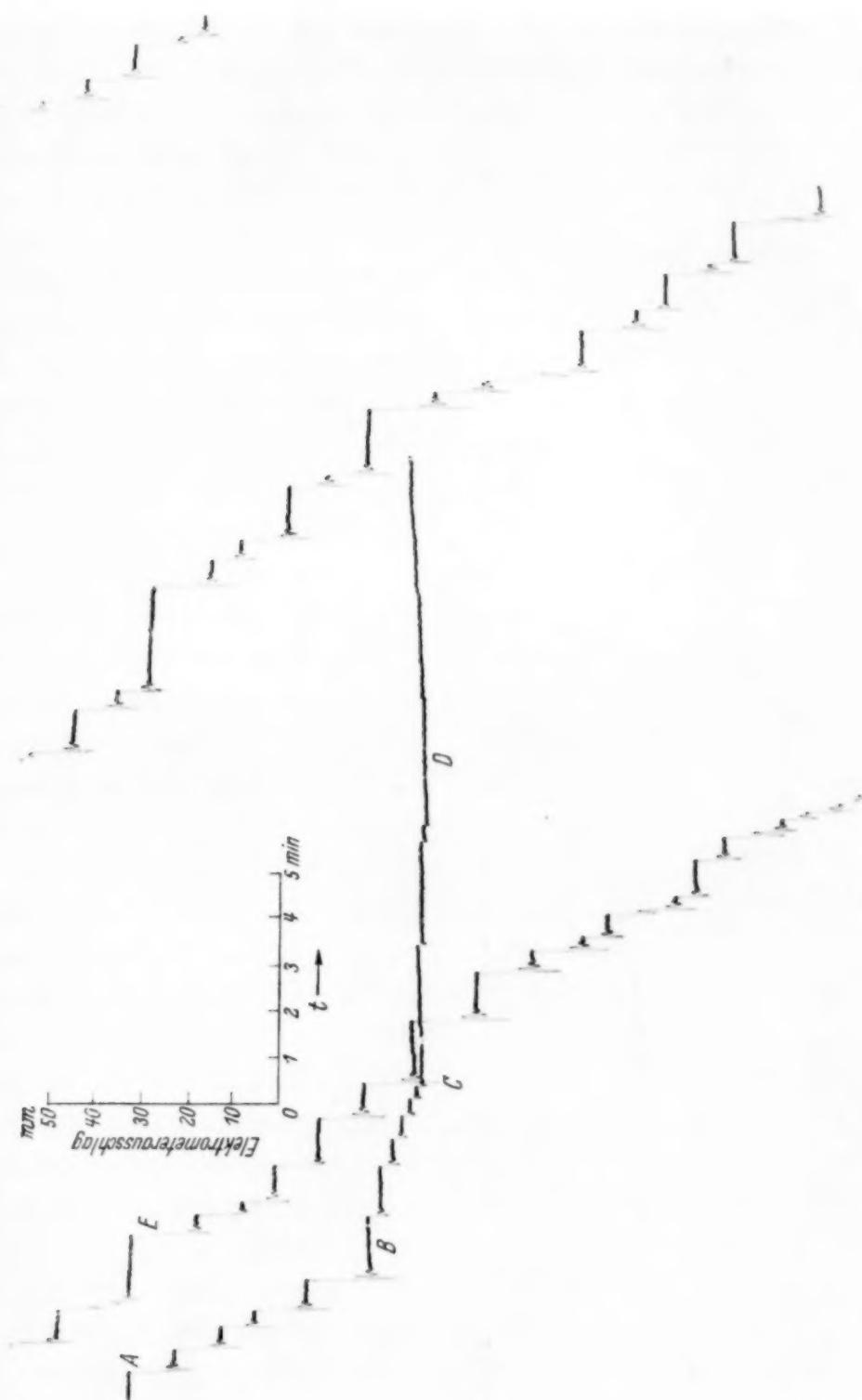


Fig. 3. Registrierung von Gleicheteilchen, α -Teilchen und Nulleffekt.
 E, A — B einzelne Elektronen, B — C α -Teilchen, C — D Nulleffekt.

und daß in einiger Entfernung von diesem keine Verstärkung mehr stattfindet.

Nachweis einzelner Elektronen. Bei einem Druck von 10 mm in der Kammer und einer Gesamtverstärkung von 200000 wurde nun der Platin-

draht schwach angeheizt und, nachdem durch subjektive Beobachtung Ausschläge erkannt werden konnten, die Stöße registriert. Fig. 3 zeigt das Bild einer solchen Versuchsregistrierung. Die Elektrometerempfindlichkeit

betrug 30000 E.-Qu./mm, die Ausschlagsrichtung geht von oben nach unten. E ist die durch einzelne Elektronen entstandene Treppenkurve. Im Punkt B ist die Heizung ausgeschaltet und die Blende vor dem Poloniumpräparat zurückgeschlagen. Die jetzt folgenden kleineren Ausschläge rühren also nur von α -Teilchen des Präparates her. Ihre Größe ist etwa 2,5 mm, d. h. bei 30000 E.-Qu./mm waren 75000 Ionen auf den Auffänger übergegangen. Da bei dem in der Kammer herrschenden Druck von 10 mm die α -Teilchen über dem Auffänger 75 Ionen erzeugen, sind sie um den Faktor 1000 verstärkt worden. An der Stelle C ist dann das Präparat wieder abgeblendet und die Registrierung zeigt als Null-effekt einige wenige Ver-seuchungsteilchen. Diese sind, wie auch an den eingeschossenen α -Teilchen zu erkennen ist, leicht von den Elektronen zu unterscheiden.

Aus der Ausmessung der Stöße der α -Teilchen ergibt sich für die Verstärkung der zweiten Strecke der Wert 1000. In Verbindung mit einer



Fig. 4. Registrierung einzeln austretender Glüh-Elektronen.

200fachen Vorverstärkung können daher die verstärkten Teilchen nur einzelne Elektronen sein. Diese Registrierung stellt damit den erstmaligen eindeutigen Nachweis von einzelnen Glühelktronen dar.

Eine zusammenhängende Registrierung von austretenden Elektronen ist in Fig. 4 wiedergegeben. Der Verstärkungsgrad blieb der gleiche, nur wurde die Elektrometerempfindlichkeit auf 50000 E.-Qu. pro mm herabgesetzt. Hierdurch werden die Ver-

seuchungsteilchen auf eine Größe unterhalb 1,5 mm reduziert und stören nicht mehr. Die Registrierung läßt erkennen, daß alle Ausschläge nahezu gleich groß und alle nur einem einzigen Elektron zugeordnet sind. Werden alle Ausschläge zusammengefaßt, so ergibt sich Fig. 5. Die über einen gewissen Bereich verstreuten Meßpunkte werden nun eingeteilt in 1 mm umfassende Ausschlagsgrößen. Die Auszählung der Meßpunkte in den einzelnen Klassen ergibt dann die Besetzungszahl, die noch in Prozenten der Gesamtteilchenzahl umgerechnet ist. Die Verteilung zeigt, daß fast 60% aller Ausschläge in der Klasse 4 bis 5 mm enthalten sind und beweist damit, daß wirklich eine proportionale Verstärkung vorliegt. Ausschläge doppelter Größe, die die Ausschlagsklasse 8 bis 10 mm zum Maximum haben müßten und von zwei Elektronen herrühren würden, sind nicht vorhanden.

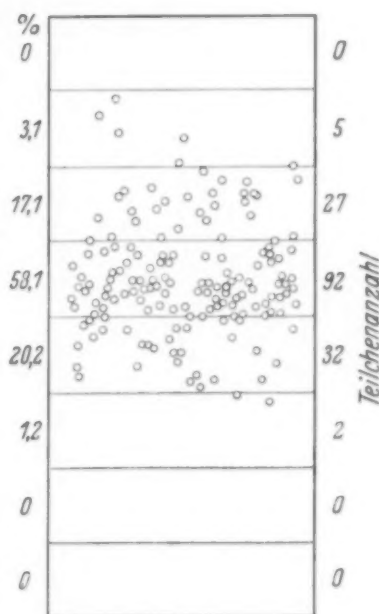


Fig. 5. Verteilung der Ausschlagsgrößen der Registrierung Fig. 4, eingeteilt in mm-Ausschlagsklassen von 1–8 mm.

Bei der Untersuchung der Platinemission auf ihren Eintritt und ihre Temperaturabhängigkeit muß zunächst geprüft werden, wieweit der Temperatureffekt durch absorbierte Gase und durch das anliegende Feld verändert wird. Fig. 6 zeigt eine Registrierung mit einem zuvor nicht ausgeglühten Draht. An Stelle der sonst nur austretenden Einzelelektronen entstehen jetzt Ausbrüche von vielen Elektronen. Die durch diese Ausbrüche entstandenen Ausschläge sind in ihrer Länge und Richtung durch Pfeile angedeutet. Daneben sind aber auch noch einzelne Elektronen, bezeichnet mit *E*, zu erkennen. Die Aufeinanderfolge der Teilchen ist sehr stark unregelmäßig. Zwischen *A* und *B* der Registrierung zeigen sich nur wenig Elektronen, während von *C* bis *D* die Ausschläge dicht folgen. Durch Glühen des Platindrahtes zunächst in Luft und dann im Hochvakuum konnte diese Erscheinung vollkommen beseitigt werden, wenn die Oberfläche nicht verunreinigt war.

Bezüglich des Einflusses des elektrischen Feldes auf die Platinemission benutzen wir die Rechnungen von Schottky. Danach ergibt sich bei einer



Fig. 6. Einfluß absorbierter Gase. Einzelne Elektronen und Elektronenausbrüche.

anliegenden Spannung von 204 Volt, also einem Potentialgradienten von 9060 Volt/cm eine Erniedrigung der Austrittsarbeit um 0,035 Volt. Selbst

Fig. 6. Einfluß absorbierter Gase. Einzelne Elektronen und Elektronenausbrüche.

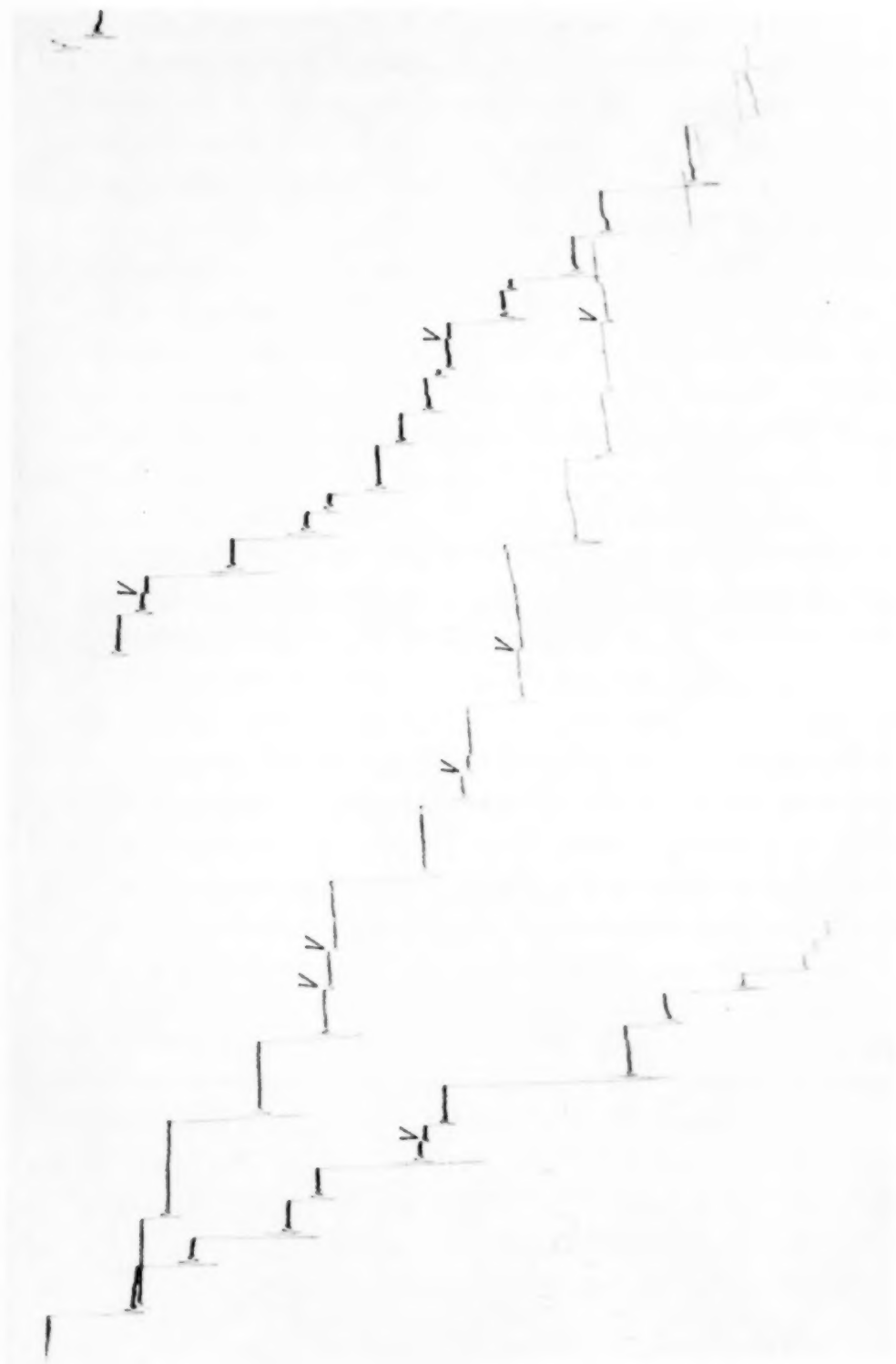


Fig. 7. Unebene Oberfläche verursacht verschiedene große Ausschläge der einzelnen Glühelctronen, r Versuchungsteilchen.

bei höherer Temperatur geht aber die dadurch hervorgerufene Vergrößerung der Zahl der austretenden Elektronen in die Fehlergrenze der Messung mit

ein. Die Berechnung gilt jedoch nur für eine ganz glatte Oberfläche. Jede Unebenheit bedingt einen örtlich sehr viel höheren Potentialgradienten, der u. U. sehr hohe Werte annehmen kann. Diese Störungen sind aber dadurch leicht zu erkennen, daß der höhere Potentialgradient zugleich eine Erhöhung des Verstärkungsgrades und damit eine Vergrößerung der Ausschläge verursacht. In Fig. 7 sehen wir eine derartige Registrierung. Die Ausschläge sind so verschieden groß, daß eine Zusammenfassung der Teilchengrößen in einer Verteilung entsprechend Fig. 5 ein vollkommen verwaschenes Bild ergeben würde.

So ist es möglich, eine saubere und glatte Drahtoberfläche bereits vor der eigentlichen Untersuchung der Emission herauszufinden. Durch Drehen des Drahtes um seine Achse konnten verschiedene Oberflächen ausgewählt werden. Wenn sich dabei keine passende Stelle fand, wurde ein neuer Draht eingesetzt. Dabei mußten jedesmal der gesamte Verstärker-aufbau auseinandergenommen und auch die Verstärkungsfaktoren neu bestimmt werden.

Einsatz der Emission und Ergebnisse. Mit einer völlig einwandfrei befundenen Oberfläche wurde dann der Einsatz der Elektronenemission untersucht. Dazu wurde die Temperatur des Heizdrahtes zunächst unter dem Wert gehalten, der aus den Vorversuchen als Einsatztemperatur schon ungefähr bekannt war, und allmählich erhöht, bis die ersten Elektronen austraten. Meistens setzte die Emission mit zwei, drei, vier oder mehr Elektronen in der Stunde ein. Um aber noch geringere Elektronen-anzahlen zu erhalten, wurden diese Drähte ausgewechselt, bis es gelang, eine fünfstündige Registrierung mit nur zwei Elektronen zu erhalten. Dies entspricht 0,4 Elektronen in der Stunde oder einer Stromdichte von $3,88 \cdot 10^{-20}$ Amp./cm² bzw. einem Strom von $1,75 \cdot 10^{-23}$ Amp.

Die Meßpunkte einer solchen Registrierung sind in folgender Tabelle wiedergegeben:

	Elektronen/Std.	Fehlergröße	Elektronen in Amp./cm ² 10^{-20}	Temperatur in °C
1.	0,4	± 0,2	3,8	509 ± 0,5 *)
2.	1,8	± 1,0	17,7	540 ± 0,5
3.	5,6	± 1,6	54	564 ± 0,5
4.	14	± 2,8	137	580 ± 0,5
5.	33	± 5,0	322	587 ± 0,5
6.	73	± 4,5	703	601 ± 0,5
7.	118	± 7,9	1140	606 ± 0,5
8.	182	± 12,8	1750	618 ± 0,5

*) Die Fehler beziehen sich auf den Absolutwert der Temperatur, der während der Messung auf $1/10^0$ C konstant gehalten wurde.

Der letzten Messung von 182 Elektronen in der Stunde entspricht eine Stromdichte von $1,75 \cdot 10^{-17}$ Amp./cm². Der Anfangswert des Emissionsstromes steht also zum Endwert im Verhältnis 1:567; die Temperatur steigt dabei von 509° C auf 618° C.

Die Fehlergröße der einzelnen Messungen ergibt sich unter Annahme einer statistischen Verteilung der austretenden Elektronen zu $1/\sqrt{z}$, wenn z die Zahl der beobachteten Teilchen ist. Der statistische Charakter der Emission wurde an insgesamt 500 Elektronen soweit bestätigt, als man es bei dieser kleinen Zahl der Ereignisse erwarten kann. Eine Steigerung der Genauigkeit durch Zählung einer größeren Anzahl von Elektronen für die einzelnen Meßpunkte erwies sich als nicht vorteilhaft, da es sonst allzu leicht vorkam, daß sich die Drahtoberfläche durch das lange Glühen veränderte. Registriert wurden 19 Stunden, so daß auf jede Messung etwa zwei Stunden entfielen.

Die Bestimmung der Austrittsarbeit erfolgte unter Zugrundelegung des T^2 -Gesetzes. Danach gilt für die Stromdichte in Amp./cm² bei der absoluten Temperatur T :

$$i = A T^2 e^{-\frac{b}{T}}.$$

Durch Logarithmieren erhält man die Gleichung der Richardsonschen Geraden:

$$\log i - 2 \log T = \log A - \frac{b}{T} \log e.$$

In der Fig. 8 sind auf der Abszisse die mit 10^3 multiplizierten $1/T$ -Werte und auf der Ordinate $\log i - 2 \log T + 26$ aufgetragen. Es zeigt sich, daß die Punkte gut auf einer Geraden liegen, wodurch das Richardsonsche Gesetz auch im Bereich einzelner Elektronen als gültig erwiesen ist¹⁾.

¹⁾ Nach Abschluß vorliegender Untersuchungen wurde mir eine Arbeit von H. Haberland und W. Walcher (ZS. f. Phys. **105**, 348, 1937) bekannt, die mit einem heizbaren Zählrohr im Gebiet einzelner Elektronen ebenfalls das Richardsonsche Gesetz bestätigen. Allerdings entfällt bei dieser Methode die Kontrolle der Stoßgrößen.

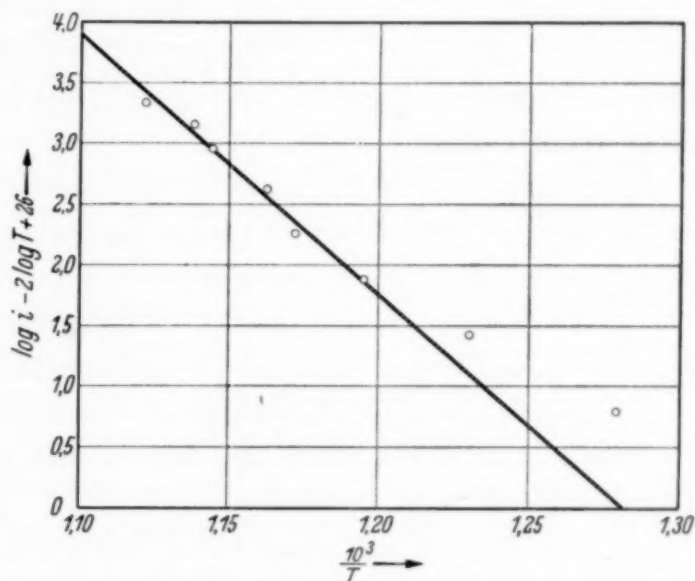


Fig. 8. Die Platinemission.

Je nach Durchlegung der Geraden ergibt der Ordinatenabschnitt Werte für A , die zwischen 10 und 300 Amp./cm² liegen, während sich aus der Steigung der Geraden b und damit die Austrittsarbeit zu 4,2 bis 4,5 Volt ergibt.

Zusammenfassung.

1. Eine Doppelverstärkeranordnung, die sich auf dem Prinzip der proportionalen Verstärkung von Ionen durch Stoßionisation aufbaut, wird entwickelt. Durch die Aufteilung der Ionisationsstrecke und zylinderförmige Anordnung ergeben sich für den Nachweis von Elektronen wesentliche Vorteile.

2. Aufbau und Wirkungsweise des Verstärkers und apparative Hilfsmittel werden beschrieben. Es wird die Multiplikation der Verstärkungsfaktoren der einzelnen Ionisationsstrecken bewiesen.

3. An Registrierungen und Verteilung der Ausschlagsgrößen werden günstige Arbeitsweise und gute Proportionalität des Verstärkers gezeigt.

4. Durch einen Verstärkungsgrad von 200000 und eine Elektrometerempfindlichkeit von 50000 E.-Qu./mm werden erstmalig eindeutig einzelne Glühelatronen nachgewiesen.

5. Der Einfluß von absorbierten Gasen der Platinoberfläche, des elektrischen Feldes und der Oberflächenunebenheiten auf den Elektronenaustritt und die Proportionalität werden an Registrierungen besprochen.

6. An einem kalibrierten Platindraht von 0,1 mm Durchmesser wird der Eintritt der Elektronenemission bei 509⁰ C mit $3,88 \cdot 10^{-20}$ Amp./cm² gefunden.

7. Bis zu diesem Elektronenstrom herab konnte die Gültigkeit des Richardsonschen Gesetzes ermittelt werden.

8. Aus dem Temperaturverlauf der Emission ergibt sich das Austrittspotential für Platin zu 4,3 Volt.

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. G. Hoffmann danke ich für sein ständiges Interesse an der Arbeit und für die Überlassung der Institutsmittel, Herrn Prof. Dr. W. Kast für seine wertvolle Unterstützung beim Abschluß der Arbeit. Herrn Priv.-Doz. Dr. H. Pose bin ich für seine rege Anteilnahme und Herrn Dr. B. Zipprich für seine Beratung beim Aufbau des Proportionalverstärkers zu Dank verpflichtet.

Mikroskopische Beobachtungen an Strichgittern mit periodischen Teilungsfehlern.

Von H. Siedentopf in Jena.

(Eingegangen am 20. Juli 1937.)

Kontrastverminderung und Verschwinden jeden zweiten Gitter-Zwischenraumes bei Einengung des mikroskopischen Öffnungsbildes läßt mit Sicherheit auf das Vorhandensein eines periodischen Teilungsfehlers schließen. Die Erscheinung tritt nicht auf, wenn kein periodischer Fehler vorliegt. Der Nachweis solcher periodischer Fehler klärt ein Mißverständnis auf, indem die Beobachtung als *im Sinne* der Abbeschen Lehre der Bildentstehung im Mikroskop liegend erkannt wird.

Unter den Übungen zur wissenschaftlichen Mikroskopie sind von Ambronn und Siedentopf¹⁾ einige *Demonstrationen* zur Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung nach Abbe zusammengestellt, von denen sich die ersten vier mit dem Parallelgitter und seinem Öffnungsbild befassen. Der benutzte einfache Diffraktionsapparat nach Abbe kann jedoch, wie wir zeigen wollen, noch zu einem anderen Zweck benutzt werden, nämlich zur mikroskopischen *Prüfung* von *geeigneten* Gittern, insbesondere zur Sichtbarmachung von Teilungsfehlern und zur leichteren Kennzeichnung ihrer individuellen Natur, womit man auch ein erhebliches Mißverständnis, das der Abbeschen Theorie entgegengebracht wurde, aufklären kann.

Die Teilwerkstätten wissen, daß kein Gitter dem anderen gleich ist. Rowland²⁾ bemerkt, daß jeder Wechsel in der Stellung des Diamanten eine andere Lichtverteilung gibt und erklärte, daß niemals dieselbe Verteilung wiederkehrt, wenn man auch noch so lange probiert. Er fand ferner, daß die Teilmaschinen so empfindlich gegen periodische Fehler sind, daß *streng vermieden* werden muß, die Umdrehungen der Antriebe und die Schaltungen in ein einfaches Zahlenverhältnis zur Teilung zu setzen, sonst erhält man sicher Spektren, die dieser Periode entsprechen. Er zählt noch andere Störungen auf, die ebenfalls die Tendenz haben, periodisch zu wirken.

Hieraus folgern wir, daß es meist nicht möglich ist, eine gewöhnliche Diffraktionsplatte nach Abbe streng fehlerfrei zu teilen, weil hier jeder zweite Strich halb so lang gezogen wird wie der vorhergehende. Das

¹⁾ H. Ambronn u. H. Siedentopf, Übungen zur wiss. Mikr., Heft 2, Zur Theorie der mikroskopischen Bilderzeugung nach Abbe. Leipzig, Hirzel, 1913. — ²⁾ H. A. Rowland, Phil. Mag. (5) 35, 397, 1893.

bedingt eine Sonderschaltung an der Teilmaschine für jeden zweiten Strich, also auch bei bester Ausführung die Tendenz zu einem periodischen Fehler, weil die Schaltung in ganz einfachem Verhältnis zur Teilung steht. Dem Vorteil, zwei verschiedene Gitter mit einer Teilung zu erhalten, steht der Nachteil gegenüber, einem periodischen Fehler Eingang zu verschaffen.

Freilich reichen trotzdem diese einfachen Diffraktionsplatten für die vier Demonstrationen, die mit dem Strichgitter für die vorgeschriebene Objektivapertur 0,17 angegeben sind, aus. Für feine Prüfungen diene der große Abbesche Diffraktionsapparat¹⁾, dessen zusammengesetzte Gitter aus zwei Teilen, also wesentlich kostspieliger, hergestellt sind und dessen feine Strichteilung sich allein auf einer Platte befindet.

Wir können jetzt weiter folgern, daß, wenn auch nicht alle, so doch wenigstens einige dieser gewöhnlichen Diffraktionsplatten sich zum Nachweis periodischer Teilungsfehler eignen werden. Individuelle und periodische Teilungsfehler werden nun sichtbar, wenn man die Beugungsspektren beiderseitig vom farblosen Hauptmaximum knapp abblendet. Wir lassen von dem ersten Beugungsspektrum der feinen Teilung nur das blaue Ende noch zu, und zwar an einer Diffraktionsplatte, die an jedem zweiten Strich mit einem periodischen Teilungsfehler behaftet ist, der aber noch nicht bei etwa 60facher Vergrößerung deutlich zu sein braucht.

Man findet, daß der Kontrast jedes zweiten dunklen Zwischenraumes der feinen Teilung zurückgegangen ist und einen rötlichen Farbton angenommen hat. Wird aber auch das blaue Ende des ersten Spektrums noch knapp abgeblendet, so daß *anscheinend* nur das farblose Hauptmaximum wirkt, dann ist jeder engere Zwischenraum ganz verschwunden und es bleibt ein flaves Bild eines Gitters mit halber Strichzahl übrig. Die Zwischenräume liegen zu denen des groben Gitters ein wenig verschoben, was man mit stärkerem Okular deutlich erkennt. Improvisiert man sich als Ersatz eines Hilfsmikroskops eine Fassung einer 27fachen Lupe, so daß diese auf der Fassung eines 15fachen Kompensationsokulars verschieblich ist und auf die Austrittspupille des Mikroskops fokussiert werden kann, so läßt sich diese Kombination zur Beobachtung der Beugungsspektren durch einfaches Umstecken am Okularendes des Mikroskoptubus gegen ein hier sehr geeignetes 30faches Okular zur Beobachtung der Interferenzerscheinungen in der Bildebene auswechseln.

¹⁾ Carl Zeiss, Optische Meßinstrumente 49, 1893. Apparat zur Demonstration des Zusammenhanges zwischen Beugungswirkung und Bild eines Objektes.

Blendet man mehr als die Hälfte des Abstandes des ersten Seitenmaximums vom Hauptmaximum beiderseits ab, so verschwindet auch das flauere Bild der doppelt so groben Teilung. Das ist im Sinne der Abbeschen Lehre schon ein deutlicher Hinweis, daß ein im Reflexlicht des Objektivs nicht leicht erkennbares und auch nicht lichtstarkes Zwischenmaximum an der flauen Interferenzerscheinung mitgewirkt hatte.

Wenn man nicht symmetrisch, sondern einseitig die Beugungserscheinung des feinen Strichgitters entsprechend abblendet, so wird der Nachweis periodischer Teilungsfehler noch empfindlicher. Man erkennt die Halbierung der Strichzahl etwas leichter und konnte bei einem periodischen Fehler von etwa $\pm 0,4\mu$ und $15,8\mu$ Gitterkonstante der groben Teilung feststellen, daß die Versetzung gegen die Striche der groben Teilung die Seite wechselt, wenn man die Blenden noch ein wenig weiter verschiebt.

Solche durch periodische Teilungsfehler entstandenen lichtschwachen Zwischenmaxima gehören zu den „Geistern“, die von Rowland entdeckt wurden. Er gibt übrigens an, daß Geister nicht nur durch periodische Teilungsfehler erzeugt werden, sondern auch durch periodische Wellen in der Oberfläche oder durch eine periodische Variation in der Grubentiefe. Sie müssen selbstverständlich bei der Bilderzeugung in Rechnung gezogen werden, sonst kommt man zu einem *optischen Paradoxon*, auf das schon Rayleigh die Aufmerksamkeit lenkte¹⁾. Man findet auch das lichtschwache Zwischenspektrum zwischen dem Maximum nullter und erster Ordnung, wenn man mit einer Gilletteklinge das grobe Gitter abdeckt und sehr sorgfältig die Beleuchtung reguliert.

Variiert man die Art des Abblendens im Öffnungsbild, so findet man außer den periodischen Fehlern auch die lokalen Abweichungen, z. B. in der Strichbreite des einzelnen Striches oder ganzer Strichgruppen. Dieser Nachweis wird noch empfindlicher, wenn man nur ein Seitenmaximum möglichst hoher Ordnung und seine nächste Umgebung zur Bilderzeugung zuläßt. Auffällig kann dann die Variation in der Strichstärke eines einzelnen Striches werden, die z. B. bei nachträglicher Ätzwirkung oder bei der Schwärzung auftreten kann.

Wichtig ist nun, daß bei einer Diffraktionsplatte nach Abbe *ohne* nennenswerten Teilungsfehler das Zwischenspektrum und die Erscheinung des Zurückgehens des Kontrastes fast jeden zweiten Zwischenraumes beim Abblenden der Beugungsspektren nicht auftritt, so daß die Abbildung des feinen Gitters mit nur der halben Strichzahl *nicht* zustande kommt.

¹⁾ Lord Rayleigh, Phil. Mag. 9, 779, 1905; Ges. Abb. 5, 254.

Bei unsymmetrischer Abblendung, z. B. einseitig von links her, verschwindet die Abbildung nicht gleichzeitig im ganzen Sehfeld, wie bei gerader Abblendung, sondern von links her, weil die Aperturwirkung im Sehfeld nicht mehr symmetrisch verteilt ist. Die Erscheinung tritt auch bei den mit Diamant geteilten Objektmikrometern nicht auf (1 mm in 100 Teile). Nur in Ausnahmefällen verrät sich eine vereinzelte Stelle, wo die Schwärzung beim Abwischen weniger standgehalten hat.

Beobachtet man die Diffraktionsplatte mit Ölimmersion, z. B. Zeiss Apochromat 90fach von 1,30 num. Apertur, so könnte man meinen, daß man in dessen Öffnungsbild sehr viel mehr Spektren erkennen könnte, als mit dem zum Diffraktionsapparat empfohlenen Objektiv 6fach von nur 0,17 num. Apertur. Während bei der etwa $\frac{23}{3}$ mal kleineren Ap. des letzteren mit gerader enger Beleuchtung der feinen Strichplatte von Geistern abgesehen nur links und rechts je zwei lichtstarke Spektren auftreten, gibt die Ölimmersion eine Kombination zwischen den Beugungsspektren, die der Gitterkonstante entsprechen, und denjenigen, die aus der Strichbreite folgen. Nach etwa dem fünften Spektrum bei groben Teilungen mit dickeren Strichen setzt die Beugungswirkung der Strichdicke ein. Von den der Strichdicke entsprechenden konnten z. B. beiderseits drei Spektren beobachtet werden. Deren Farben waren aber nicht symmetrisch verteilt. Zunächst fiel gemäß der bekannten Auslöschungsregel, nach der das Verhältnis von Strichbreite zur Stegbreite zu beachten ist, das erste Seitenmaximum der Strichbreite beiderseits sehr schwach aus. Das zweite Seitenmaximum zeigte auf der einen Seite erheblich abweichende und flaue Farben, während die dritten Seitenmaxima beiderseits ein sehr lichtstarkes Band ergaben. Diese Seitenmaxima waren durch die aus der Stegbreite folgenden entsprechend dichter liegenden Seitenmaxima lichtschwach kanelliert.

Um letztere Erscheinungen gut mit dem Mikroskop zu sehen, empfiehlt sich die Verwendung des Planspiegels mit dem aplanatischen Zeiss-Kondensor von 0,6 Apertur. Dessen vordere Brennebene liegt ungefähr in der Einlegeebene des Diaphragmenträgers am Beleuchtungsapparat, in welchen man parallel zu den Strichen der Teilung die Kondensorspaltblende des Diffraktionsapparats legt. Deren Beugungsbilder liegen auf der stark parabolisch dem Objekt zu gekrümmten hinteren meridionalen Brennebene der Ölimmersion, so daß man zu ihrer Beobachtung für den Rand gegen die Mitte das Hilfsmikroskop ungefähr 4 mm tiefer einstellen muß. Die Nachmessung mit dem Okularschraubenmikrometer ergab z. B. ungefähr ein Verhältnis 1 zu 6 zwischen „gesehener“ Strichbreite und Gitter-

konstante. Einen etwas genaueren Mittelwert dieses Verhältnisses und damit der Strichbreite, der auch von der Wirkung der Kontrastfunktion auf das „gesehene“ Bild frei ist, würde man durch die Aperturbestimmung der Beugungsspektren und Messung der Brennweite des Objektivs erhalten können. Die sehr unsymmetrische Helligkeits- und Farbenverteilung im Beugungsspektrum der Strichdicken ließ schon eine entsprechend unsymmetrische Gestalt der Strichgruben und Abbildung der Striche der übrigens in diesem Falle vom periodischen Fehler genügend freien Teilung erwarten.

Eine feinere mikroskopische Analyse der Gitterteilung bekommt man, wenn man auch die in den eigentlich dunkel sein sollenden Zwischenräumen zwischen den hellen Strichen des groben und feinen Gitters auftretenden Interferenzerscheinungen prüft. Von den vielen möglichen Kombinationen stellen wir einige *einseitige* Abblendungen in der nachstehenden Tabelle 1 zusammen. Deren erste Spalte nennt nach dem Bilde im Hilfsmikroskop die zugelassenen Spektren der groben Teilung mit deren Ordnungsziffer; die zweite Spalte gibt an, in wie viel Maxima und Minima die Zwischenräume der groben Teilung aufspalten. Die dritte Spalte gibt die Aufspaltung der ungeradzahligen (*a*) und der geradzahligen (*b*) Zwischenräume der feinen Teilung. Die vierte Spalte kennzeichnet nach dem Mikroskopbild eine Verschiebung nach rechts + oder links — oder als Fortsetzung 0 des ersten Min. der ungeradzahligen Zwischenräume (*a*) gegen das linke Min. der groben Teilung und der geradzahligen Zwischenräume (*b*) gegen das rechte Min. der groben Teilung. Die letzte Spalte hebt mit einem Kreuz die Erkennbarkeit des periodischen Fehlers und mit zwei Kreuzen dessen deutliche Erkennbarkeit hervor.

Tabelle 1.

1	2	3		4		5
		a	b	a	b	
0 1 2 3 4 5	4 Ma 5 Mi	Tendenz zu 2 Ma 3 Mi	1 Ma 2 Mi			+
0 1 2 3 4	3 Ma 4 Mi	1 Ma 2 Mi	1 Ma 2 Mi			
0 1 2 3	2 Ma 3 Mi	1 Mi dick	1 Mi dünn	+	0	++
	(das mittlere Mi rötlich)					
0 1 2	1 Ma 2 Mi	1 Mi	1 Mi	—	+	
0 1	0 Ma 1 Mi	1 Mi sehr flau	verschwunden	—		
1	helle Fläche	dunkle Fläche				
1 2	0 Ma 1 Mi	verschwunden	1 Mi flau bläulich		+	
1 2 3	1 Ma 2 Mi	1 Mi rötlich	1 Mi flau gelblich	—	0	
1 2 3 4	2 Ma 3 Mi	1 Mi	1 Mi rötlich	+	0	+

Zunahme der Interferenzen in den Zwischenräumen des groben Gitters (2) und des feinen Gitters (3) mit Zunahme der für die Bilderzeugung zugelassenen Beugungsspektren (1).

An den Interferenzen der Spalte 2 erkennen wir, daß die Zahl der Mi um 1 kleiner ist als die Zahl der mitwirkenden Spektren, und daß die Zahl der Ma um 1 kleiner ist als die der Mi. Von den bekannten Interferenzen im Spaltbild unterscheidet sich dieser Fall der Interferenzen in den dunklen Zwischenräumen durch die Umkehr von Hell und Dunkel und durch die unsymmetrische Abblendung im Objektiv. Auch hier treten Mi nur auf, wenn wenigstens zwei Spektren mitwirken. Die im allgemeinen gerade Beleuchtung war nur im ersten Falle ein wenig schief, um noch das fünfte Seitenspektrum auf der einen Seite in das Öffnungsbild eintreten zu lassen.

Die Interferenzen lassen sich aus den Abbeschen Formeln für die Abbildung *eines* Spaltes von endlicher Breite ableiten, worauf an anderer Stelle eingegangen wird im Zusammenhang mit praktischer Auswertung für genaue mikroskopische Messungen.

Aus den mikroskopischen Experimenten an der einfachen Diffraktionsplatte nach Abbe ergibt sich, daß ihr Strichgitter zwar für die ausgewählten einfachen *Demonstrationen* zur Abbeschen Lehre und evtl. zum Nachweis der Wirkung periodischer Fehler von Strichgittern geeignet ist, daß sie aber im allgemeinen grundsätzlich nicht dazu bestimmt ist, um feinere Beugungsfragen klar zu stellen, die eine höhere Apertur als die des dazu vorgeschriebenen Objektivs verlangen. Insbesondere sollte man zur feineren *Prüfung* der Abbildungslehre von Abbe, die von Teilungsfehlern freie Gitter voraussetzt, nicht ein solches wählen, das wie das Strichgitter der einfachen Diffraktionsplatte wegen der Wechsellänge ihrer Striche von vornherein nach Rowland einen periodischen Fehler erwarten läßt. Freilich können bei Anwendung des hier beschriebenen Prüfverfahrens auf diese Diffraktionsplatten solche mit merklichem periodischen Fehler leicht ausgeschieden werden.

Aus dem gleichen Grunde sind Naturobjekte im allgemeinen nicht gut genug geteilt, um feinere Beugungsfragen zu entscheiden. Das mag auch für Diatomeenmuster gelten. Da ein periodischer Fehler merklich kleiner ist als die Gitterkonstante, müßte man zu dessen sicherer Feststellung ein Objektiv von im Verhältnis ebenso viel höherer Apertur anwenden, als nur zur Auflösung der Gitterkonstante gehört. Soweit aber deren Auflösung an der Grenze der stärksten Objektive liegt, wird man eine Kontrolle auf periodische Fehler so nicht vornehmen können.

Die Halbierung der Strichzahl ist bei einer Abbeschen Diffraktionsplatte schon von Wetzlich und Stade beobachtet¹⁾. Es ist nicht auf-

¹⁾ H. Wetzlich u. G. Stade, ZS. f. Phys. 86, 377, 1933.

fallend, daß den Autoren sowohl der periodische Fehler der Teilung als Ursache der Erscheinung entgangen ist und ebenso das Auftreten der Zwischenspektren, da sie nur wenige Zeilen der Beschreibung des Experiments widmen. Nachdem aber die Beobachtung von ihnen kurzerhand in Widerspruch zur Abbeschen Lehre der Bildentstehung im Mikroskop gesetzt wurde, dient die vorliegende Untersuchung auch zur Aufklärung dieses Mißverständnisses durch den Hinweis, daß man bei unbefangener Anwendung der Abbeschen Lehre aus der Halbierung der Strichzahl das Vorhandensein eines nicht mit abgeblendeten Zwischenspektrums zu folgern hat und demzufolge bei sorgfältigem Mikroskopieren auch finden muß. Deutlich empfand Rowland, der anerkannte Meister der Gitterteilungen, schon vor mehr als 40 Jahren die praktische Unvermeidlichkeit gerade dieses Zwischenspektrums. Er sagte dazu: „... I never was able to entirely eliminate the intermediate spectra due to 14,436 lines, and make a pure spectrum due to 28,872 lines to the inch ...“

Diese Zwischen- oder *Geisterspektren* sind aber ein feststellbares Kennzeichen des Öffnungsbildes, das notwendig ein bestimmtes anderes feststellbares Kennzeichen des Objektbildes zur Folge hat, wie hier die dem Objekt nicht konforme *Zwischenraumzahl*. Also gilt auch für die Bildwirkung der als Geisterspektren auftretenden Strahlenbüschel der ganz allgemeine Satz von Abbe¹⁾: „Die im Gesichtsfeld des Mikroskops erscheinende Strukturzeichnung ist in allen ihren Merkmalen, sowohl in denjenigen, die der Beschaffenheit des Objekts möglicherweise konform, wie auch in denjenigen, die ihr nicht konform sind, nichts anderes als das Resultat des Interferenzvorganges beim Zusammentreffen der sämtlichen wirksamen Strahlenbüschel“.

¹⁾ E. Abbe, Ges. Abh. 1, 83.

Über die Bindungskräfte zwischen elementaren Kernpartikeln.

Von Egil A. Hylleraas in Oslo.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 14. Juli 1937.)

Es wird für das System Proton—Neutron ein geeignetes Potential eingeführt, das eine elementare Integration der Wellengleichung gestattet. An Hand der abgeleiteten übersichtlichen Formeln werden sowohl die stationären Zustände des Deuterons als die Streuung von Neutronen durch Protonen diskutiert. Schließlich werden Grundzustände und angeregte Zustände von H^3 , He^3 und He^4 berechnet bei der Annahme punktförmiger und starrer „Dineutronen“ und „Diprotonen“.

Einleitung. Das wichtigste Merkmal der zwischen Kernpartikeln wirkenden Kräfte scheint ihre kurze Reichweite zu sein, sonst ist ihre wahre Natur noch sehr wenig bekannt. Bei der Wahl von Potentialgesetzen kann man daher vorläufig die Forderungen der rein rechnerischen Bequemlichkeit an die Spitze stellen. Es sind bis jetzt meistens das rechteckige Potentialloch, die exponentielle Abnahme des Potentials und die „Fehlerfunktion“ benutzt worden.

Es soll hier erstens ein neues Potentialgesetz mit exponentieller Abnahme der Kernkräfte eingeführt werden, das elementare Integration der Wellengleichung eines Zweikörperproblems erlaubt. Zweitens soll bei gleichen Partikeln die Vorstellung von „Diprotonen“ und „Dineutronen“ benutzt werden, um den Angriff auf schwerere Atomkerne zu erleichtern. In erster Näherung betrachten wir das „Diproton“ und das „Dineutron“ als punktförmige Partikeln und sehen von der Coulombschen Energie des „Diprotons“ ab, in nächster Näherung behandeln wir sie als starre Rotatoren mit einem Kernabstand, der der Coulombschen Energie des He^3 entspricht.

Bezüglich anderer Arbeiten auf demselben Gebiet verweise ich der Kürze halber auf die glänzende Übersichtsdarstellung von Bethe und Bacher¹⁾ in „Reviews of Modern Physics“. Einige spätere Arbeiten, z. B. von Feenberg und Wigner²⁾, Wigner³⁾ und Hund⁴⁾, gehen über den Rahmen dieser Untersuchung weit hinaus.

¹⁾ H. A. Bethe u. R. F. Bacher, Rev. Mod. Phys. **8**, 83, 1936. —

²⁾ E. Feenberg u. E. Wigner, Phys. Rev. **51**, 95, 1937. — ³⁾ E. Wigner, ebenda **51**, 106, 1937. — ⁴⁾ F. Hund, ZS. f. Phys. **105**, 202, 1937.

1. *Theorie des Deuterons.* Es sei M die angenähert gemeinsame Masse des Protons und des Neutrons, $V(r)$ das Potential zwischen beiden als Funktion des Abstandes r . Dann lautet die Wellengleichung dieses Zweikörperproblems in relativen Koordinaten:

$$\left\{ \frac{\hbar^2}{M} \Delta + E - V(r) \right\} \psi = 0. \quad (1)$$

Von Majoranaschen Kräften sehen wir hier ab und können dann bei der Annahme

$$V(r) = -W(r) \mp H(r) \quad (2)$$

und mit Hilfe der Substitution

$$\psi = r u_l(r) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (3)$$

die Gleichung (1) in

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{M}{\hbar^2} (E - V) \right\} u_l = 0 \quad (4)$$

überführen. In (2) bezeichnet $H(r)$ Heisenbergsche Austauschkräfte, und es ist beim parallelem Spin von Proton und Neutron das obere, beim antiparallelem Spin das untere Vorzeichen zu nehmen. Wir behalten die gemeinsame Bezeichnung $V(r)$ für beide Potentiale bei und brauchen nur zu erinnern, daß $W(r)$ und $H(r)$ sich nur bezüglich der Tiefe, nicht bezüglich der Form oder „Reichweite“ des Potentials unterscheiden.

Die als „Reichweite“ zu definierende Größe nennen wir a , und diese nehmen wir zweckmäßig als Längeneinheit. Mit $r = \varrho a$ geht dann die Gleichung (4) in

$$\left\{ \frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} + \frac{MEa^2}{\hbar^2} - \frac{MVa^2}{\hbar^2} \right\} u_l = 0 \quad (5)$$

über, und die Potentiale können in bequemer Standardform gegeben werden. Für das rechteckige Potential ist z. B. $V = -V_0$ für $\varrho \leq 1$, $V = 0$ für $\varrho > 1$, und wir haben außerdem zwei andere oft benutzte Potentiale $V = -V_0 e^{-\varrho}$ und $V = -V_0 e^{-\varrho^2}$. Das letzte ist bei der Variationsmethode einigermaßen anwendbar, sonst im allgemeinen wenig bequem. Das exponentielle Potential dagegen wird aus ganz speziellen Gründen unbequem. Es hat nämlich in $\varrho = 0$ keine singuläre Stelle, keinen Pol und auch keine horizontale Tangente, weswegen die Erfüllung der Randbedingung $u_l = 0$ für $\varrho = 0$ nur an Hand numerischer Rechnungen kontrolliert werden kann.

Wir nehmen hier ein Potential, das bei $\varrho \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null geht und in $\varrho = 0$ entweder eine horizontale Tangente oder einen Doppelpol hat. Der letzte Fall soll nur ganz vorübergehend als eine formale Möglichkeit mitgenommen werden.

Wir setzen

$$V = -V_0(1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) + V_1(1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) / \operatorname{tgh}^2 \varrho, \quad (6)$$

dessen Minimum $-(\sqrt{V_0} - \sqrt{V_1})^2$ bei $\operatorname{tgh}^2 \varrho = \sqrt{V_1/V_0}$ liegt. Beim Einsetzen in (5) und durch Einführung der neuen Variablen $\xi = \operatorname{tgh} \varrho$ erhält man

$$\left\{ \frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} - \frac{l(l+1)}{\left(\frac{1}{2} \log \frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2} + \frac{M E a^2}{h^2} \frac{1}{1 - \xi^2} + \frac{M V_0 a^2}{h^2} - \frac{M V_1 a^2}{h^2} \frac{1}{\xi^2} \right\} u_l = 0. \quad (7)$$

Bei $l = 0$ ist diese Gleichung elementar integrierbar und geht bei $V_1 = 0$ in die zugeordnete Legendresche Differentialgleichung über. Mit

$$E = -\varepsilon, \quad \frac{M \varepsilon_0}{h^2} = \alpha^2, \quad \frac{M V_0 a^2}{h^2} = (\alpha a + \mu + 1)(\alpha a + \mu + 2),$$

$$\frac{M V_1 a^2}{h^2} = \mu(\mu + 1) \quad (8)$$

ist die Lösung

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0} = \frac{(\alpha a - 2n)^2}{(\alpha a)^2}, \quad u_{0n} = \xi^{\mu+1} (1 - \xi^2)^{\frac{\alpha a}{2} - n} \sum_{v=0}^n c_v \xi^{2v}. \quad (9)$$

ε_0 ist die Energie des Grundzustandes und $1/\alpha$ eine entsprechende Standardlänge, der „Radius des Deuterons“. αa ist die „Reichweite“ der Kernkräfte in dieser Standardlänge gemessen. Bei $\alpha a = 2, 4, 6, \dots$, treten sukzessive höhere Zustände auf. Es wird gewöhnlich angegeben:

$$\varepsilon_0 = 2,14 \text{ MV}, \quad \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{M \varepsilon_0}} = 4,36 \cdot 10^{-13} \text{ cm}. \quad (10)$$

Bei $\mu = 0$ hat man im Gebiet

$$0 < \alpha a < 2, \quad \infty > V_0 > 3 \varepsilon_0 \approx 6,4 \text{ MV}$$

keinen angeregten S -Zustand. Um hinreichend große Bindungsenergie für höhere Kerne zu geben, muß V_0 bedeutend größer als der obige Grenzwert sein. αa ist von der Größenordnung 1 oder kleiner, V_0 von der Größenordnung $6 \varepsilon_0 \approx 13$ MV oder größer. Höhere S -Zustände des Deuterons sind daher ausgeschlossen.

Es bezieht sich aber V_0 auf die Triplettzustände des Deuterons, d. h. auf das Potential der beiden Partikeln beim parallelen Spin. Beim antiparallelen Spin ist ein anderes Potential V'_0 zu benutzen.

Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= W_0 + H_0 = \frac{(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)}{(\alpha a)^2} \varepsilon_0, & \varepsilon'_0 &= \frac{(\beta a)^2}{(\alpha a)^2} \varepsilon_0, \\ V'_0 &= W_0 - H_0 = \frac{(\beta a + 1)(\beta a + 2)}{(\beta a)^2} \varepsilon'_0 = \frac{(\beta a + 1)(\beta a + 2)^2}{(\alpha a)^2} \varepsilon_0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

und erhalten als Bedingung für die Existenz des tiefsten Singulettzustandes mit der Bindungsenergie ε_0 :

$$\frac{V'_0}{V_0} = \frac{(\beta a + 1)(\beta a + 2)}{(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)}, \quad \frac{V'_0}{V_0} > \frac{2}{(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)}. \quad (12)$$

Es muß also z. B. bei $\alpha a = 1$, $V'_0 > \frac{1}{3} V_0$, bei $\alpha a = \frac{1}{2}$, $V'_0 > \frac{8}{15} V_0$ sein.

Wir wenden uns nun an die Zustände P, D, \dots mit Drehimpuls $l\hbar$, $l = 1, 2, \dots$, und schreiben bei $V_1 = 0$, $\mu = 0$ die Wellengleichung auf die Form:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{d\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} - m^2 + (\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) \right) u_l &= 0, \\ \varepsilon_l &= \frac{m^2}{(\alpha a)^2} \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Diese Gleichung kann nicht exakt gelöst werden. Er ist aber

$$\frac{1}{3} (1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) < \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho}{\operatorname{tgh}^2 \varrho} < \frac{1}{3} \quad (14)$$

und wir begnügen uns damit, $1/q^2$ durch den Mittelwert dieser oberen und unteren Grenze zu ersetzen. Dann ist die Bedingung für die Existenz des tiefsten l -Zustandes, d. h. daß $m \geq 0$ ist,

$$\begin{aligned} & (\alpha a + 1)(\alpha a + 2) - \frac{1}{6} l(l+1) \\ &= (\sqrt{m^2 + \frac{1}{6} l(l+1)} + l + 1) (\sqrt{m^2 + \frac{1}{6} l(l+1)} + l + 2) \\ &\geq (\sqrt{\frac{1}{6} l(l+1)} + l + 1) (\sqrt{\frac{1}{6} l(l+1)} + l + 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Man erhält bei $l=1$, $\alpha a \geq 1,631$, bei $l=2$, $\alpha a \geq 3$, und selbst die Existenz des tiefsten P -Zustandes des Deuterons ist daher bei dem in Gleichung (13) benutzten einfachsten Potentialansatz ausgeschlossen. Günstiger für die Existenz der P -Zustände ist der Ansatz der Gleichung (6) mit $V_1 > 0$. Solange keine zwingenden Gründe für eine derartige Abänderung des Potentialansatzes vorliegen, ziehen wir aber vor, die anerkannte Deutung des höheren Zustandes des Deuterons als einen Singulett- S -Zustand beizubehalten.

2. *Streuung von Neutronen durch Protonen.* Maßgebend für die Anzahl gestreuter Neutronen in einem Protonengas (d. h. in einer wasserstoffhaltigen Substanz) ist der totale Wirkungsquerschnitt der Protonen gegenüber Neutronen, der eine Funktion der Neutronengeschwindigkeit und gewisser Phasenverschiebungen δ_l ist.

Es sei die einfallende ungestreute Welle in relativen Koordinaten durch $\psi_0 = e^{ikx}$ gegeben. Diese kann als aus Kugelwellen zusammengesetzt aufgefaßt werden, vermittels der Gleichung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikx} = \lim_{r \rightarrow \infty} e^{ikr \cos \vartheta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) i^l \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi}{2} l\right)}{kr}. \quad (16)$$

Diese befriedigt im allgemeinen nicht die Wellengleichung bei einem von Null verschiedenen Potential, die etwa die asymptotischen Lösungen

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) i^l e^{i\delta_l} \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_l\right)}{kr}$$

hat. Die Differenz der beiden ist die gestreute Welle, wobei zu beachten ist, daß die Faktoren $e^{i\delta_l}$ in den einzelnen Gliedern der exakten Lösung hinzu-

gefügt sind, damit die gestreute Welle, den physikalischen Bedingungen entsprechend, aus lauter ausgehenden Wellen besteht. Es ergibt sich dann für die gestreute Welle der Ausdruck:

$$\psi - \psi_0 = \psi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) i^l (e^{2i\delta_l} - 1) \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{2}l)}}{2ikr}. \quad (17)$$

Man sieht daraus, daß der Bruchteil der Partikeln, der innerhalb eines festen Raumwinkels $d\omega$ gestreut wird, gleich

$$d\sigma = \frac{|\psi_1|^2}{|\psi_0|^2} r^2 d\omega \quad (18)$$

ist. Durch Integration erhält man somit:

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \left| \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2} \right|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (19)$$

Wegen der kleinen Reichweite des Potentials werden sämtliche δ_l bei $l \geq 1$ sehr klein, wir können

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_0^2} \sin^2 \delta_0 \quad (20)$$

setzen und uns auf die Berechnung von δ_0 beschränken. Wir benutzen dabei die Gleichung

$$\left\{ \begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + m^2 + (\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) \right\} u_0 = 0, \\ &m = ka, \quad E = \frac{m^2}{(\alpha a)^2} \varepsilon_0. \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Hier ist E die Energie des Systems Proton—Neutron beim ruhenden Schwerpunkt der beiden Partikeln. Diese ist auf die Hälfte gesunken wegen der reduzierten Masse. Die Energie E_0 des Neutrons beim ruhenden Proton ist $E_0 = 2E$.

Wir setzen

$$u_0 = \frac{1}{2i} [y e^{im\varrho} - y^* e^{-im\varrho}], \quad \delta_0 = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{1}{2i} \log \frac{y}{y^*}, \quad (22)$$

wobei y und y^* komplex konjugierte Funktionen sind mit der Randbedingung $y = y^* = 1$ bei $\varrho = 0$, damit u_0 in diesem Punkte gleich Null wird. Es ergibt sich für y die Differentialgleichung

$$\left\{ \frac{d^2}{d\varrho^2} + 2im \frac{d}{d\varrho} + (\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) \right\} y = 0, \quad (23)$$

die durch

$$y = c \left[1 - \frac{(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)}{1(1 - im)} \frac{1 - \operatorname{tgh} \varrho}{2} + \frac{\alpha a(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(\alpha a + 3)}{1 \cdot 2(1 - im)(2 - im)} \left(\frac{1 - \operatorname{tgh} \varrho}{2} \right)^2 - \frac{(\alpha a - 1)\alpha a(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(\alpha a + 3)(\alpha a + 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3(1 - im)(2 - im)(3 - im)} \left(\frac{1 - \operatorname{tgh} \varrho}{2} \right)^3 + \dots \right] \quad (24)$$

befriedigt wird. Es ist dann, wegen $y = 1$ bei $\varrho = 0$,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} &= 1 - \frac{(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)}{1(1 - im)} \frac{1}{2} + \frac{\alpha a(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(\alpha a + 3)}{1 \cdot 2(1 - im)(2 - im)} \frac{1}{4} - \dots, \\ \delta_0 &= \frac{1}{2i} \log \frac{c}{c^*}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Bei $\alpha a = 0, 1, 2 \dots$ bricht die Reihe ab, und man erhält exakte, geschlossene Ausdrücke für c und δ_0 , z. B.

$$\left. \begin{aligned} \alpha a = 1, \quad c &= \frac{im - 2}{im + 1}, \quad \delta_0 = \operatorname{arctg} \frac{1}{m} + \operatorname{arctg} \frac{2}{m}, \\ \alpha a = 2, \quad c &= \frac{(im - 1)(im - 3)}{im(im + 2)}, \\ \delta_0 &= \operatorname{arctg} \frac{1}{m} + \operatorname{arctg} \frac{2}{m} + \operatorname{arctg} \frac{3}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Wir sehen, daß bei $m \rightarrow \infty$ immer $\delta_0 \rightarrow 0$, und so werden hinreichend energiereiche Partikeln sehr wenig gestreut, nicht nur wegen der hohen Geschwindigkeit, sondern auch wegen kleiner Phasenverschiebung. Bei $\alpha a = 2$ und $m \rightarrow 0$ ist die Phasenverschiebung $\delta_0 = 3 \frac{\pi}{2}$, und es wird der Wirkungsquerschnitt für sehr langsame Neutronen unendlich. Es bedeutet

dies gewissermaßen eine Interferenz der einfallenden Neutronen mit dem zweiten stabilen S -Zustand des Deuterons mit der Energie Null. Bei $m=1$, $E = \frac{1}{4} \varepsilon_0$ ist $\delta_0 = \pi$ und die Neutronen gehen glatt hindurch. Bei $m^2 = 11$, $E = \frac{11}{4} \varepsilon_0$ ist $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$ und die Streuung hat wieder den zu der betreffenden Geschwindigkeit gehörenden möglichen Maximalwert. Man hat hier die maximale Wechselwirkung mit dem Grundzustand. Bei $\alpha a = 1$ wird $\delta_0 = \pi$, wenn $m \rightarrow 0$, dagegen $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$, wenn $m = \sqrt{2}$, $E = 2 \varepsilon_0$.

Bei $\alpha a = 0$ ist in erster Näherung $\delta_0 = \arctg 1/m$ und es wird scheinbar für langsame Partikeln der Wirkungsquerschnitt wieder unendlich. Das gilt nur, wenn $\varepsilon_0 = 0$. Bei $\varepsilon_0 \neq 0$ muß man in (25) Glieder von der Größenordnung αa mitnehmen. Man erhält in dieser Weise

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= 1 - \frac{1 + \frac{3}{2} \alpha a}{1 - im} + \frac{\alpha a}{1 - im} \left[\frac{3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{5}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{16} + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{1 + \frac{3}{2} \alpha a}{1 - im} + \frac{1}{2} \frac{\alpha a}{1 - im} = \frac{im + \alpha a}{im - i}, \quad \delta_0 = \arctg \frac{1}{m} + \arctg \frac{\alpha a}{m}. \quad (27) \end{aligned}$$

Man ersieht daraus, daß die Formel

$$\delta_0 = \arctg \frac{\alpha a + 1}{m} + \arctg \frac{\alpha a}{m} \quad (28)$$

sowohl bei $\alpha a = 1$ als bei $\alpha a \rightarrow 0$ exakt wird. Mit einem dritten Glied, etwa

$$\arctg \frac{m(\alpha a)^2(\alpha a - 1)}{4[m^2 + \alpha a(2 - \alpha a)]}$$

könnte die Formel noch für $\alpha a = 2$ exakt werden. Im Gebiet $0 \leq \alpha a \leq 1$ bedeutet dies Glied eine äußerst winzige Korrektur, und da überhaupt nur dies Gebiet in Frage kommt, nehmen wir die einfache Formel (28). Es ergibt sich daraus:

$$\left. \begin{aligned} \cotg \delta_0 &= -\frac{\alpha a}{m} \frac{1 + \alpha a - \alpha a \left(\frac{m}{\alpha a}\right)^2}{1 + 2\alpha a}, \\ \sin^2 \delta_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_0}{E} \left[\frac{1 + \alpha a - \alpha a (E/\varepsilon_0)}{1 + 2\alpha a} \right]^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Beachtet man nun, daß in Gleichung (20)

$$m = ka, \quad k = \frac{m}{a} = \alpha \frac{m}{\alpha a} = \alpha \sqrt{\frac{E}{\varepsilon_0}}, \quad (30)$$

so erhält man schließlich die Streuungsformel

$$\sigma = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\varepsilon_0}{E + \varepsilon_0 \left[\frac{1 + \alpha a - \alpha a (E/\varepsilon_0)}{1 + 2\alpha a} \right]^2}. \quad (31)$$

Diese Formel geht bei hinreichend kleinem αa in die bekannte Streuformel

$$\sigma = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\varepsilon_0}{E + \varepsilon_0} = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\varepsilon_0}{\frac{1}{2} E_0 + \varepsilon_0} \quad (32)$$

des rechteckigen Potentialloches über, vorausgesetzt, daß E/ε_0 klein oder von mäßiger Größe ist. Bei $\alpha a = 1$ erhält man dagegen (ebenfalls für kleine oder mäßige Werte von E/ε_0)

$$\sigma = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\varepsilon_0}{E + \frac{4}{9} \varepsilon_0}. \quad (33)$$

Bei dem hypothetischen Singulettzustand ist ε_0 durch ε'_0 zu ersetzen oder durch $|\varepsilon'_0|$, falls ε'_0 negativ ist (d. h. wenn der Zustand nicht mehr stabil ist). αa ist durch βa zu ersetzen, $\beta a/\alpha a = \sqrt{|\varepsilon'_0|/\varepsilon_0}$. Man erhält somit die endgültige Streuformel:

$$\begin{aligned} \sigma = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\frac{3}{4} \varepsilon_0}{E + \varepsilon_0 \left[\frac{1 + \alpha a - \alpha a (E/\varepsilon_0)}{1 + 2\alpha a} \right]^2} \\ + \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{\frac{1}{4} \varepsilon_0}{E + |\varepsilon'_0| \left[1 - \alpha a \sqrt{\frac{|\varepsilon'_0|}{\varepsilon_0}} \frac{E}{\varepsilon'_0} \right]^2}, \quad (34) \end{aligned}$$

indem man das statistische Gewicht des Singulett- und des Triplettzustandes berücksichtigt.

Wenn $|\varepsilon'_0|$ klein ist, kommt für langsame Neutronen nur das letzte Glied in Frage, und das Vorzeichen von ε'_0 spielt keine wesentliche Rolle. Bei Energiewerten der einfallenden Neutronen gleich der Bindungsenergie des Deuterons kommt z. B. bei $\alpha a = \frac{1}{2}$ der Wirkungsquerschnitt auf etwa $2,5 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ heraus, während experimentell $\sigma = 1,1$ bis $1,5 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ angegeben wird. Das Ergebnis ist, wenn den experimentellen Werten zu vertrauen ist, ein wenig schlechter als beim rechteckigen Potentialloch.

Mit dieser neuen Bestätigung der Notwendigkeit von stabilen oder beinahe stabilen Zuständen des Deuterons mit kleiner Energie, um die starke Streuung von langsamen Neutronen in Wasserstoff zu erklären, verlassen wir die Streuungsprobleme.

3. *Qualitative Theorie der Kerne H^2 , H^3 , He^3 und He^4 nach der Diproton-Dineutronvorstellung.* Wir benutzen hier zunächst die ganz grobe Vorstellung von punktförmigen Diprotonen und Dineutronen, hauptsächlich, um zu zeigen, wie die großen Bindungsenergien von H^3 und He^4 durch Verdoppelung der Potentiale und Vergrößerung der schwingenden Massen zustande kommen können.

Wir müssen uns dann gewissermaßen vorstellen, daß die beiden Protonen oder die beiden Neutronen durch ein Potential der Art einer δ -Funktion aneinander gebunden sind mit der Bindungsenergie angenähert gleich Null. Von der Coulombschen Energie des Diprotons sehen wir in dieser Näherung ab.

Die Massen des Diprotons und des Dineutrons sind nun $2M$, die reduzierte Masse von H^3 und He^3 $\frac{2}{3}M_1$, und die reduzierte Masse von He^4 ist gleich M . Die Massen von H^2 , H^3 und He^4 verhalten sich daher wie die Zahlen 1, $\frac{4}{3}$, 2. Das Verhältnis der Potentiale ist entsprechend wie 1, 2, 4.

Die Wellengleichungen lauten daher:

$$\begin{aligned} H^3, He^3: & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{4}{3} (\alpha a)^2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} + \frac{8}{3} (\alpha a + 1) (\alpha a + 2) (1 - \operatorname{tgh}^2 \rho) \right\} u_0 = 0, \\ He^4: & \left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} - 2 (\alpha a)^2 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_0} + 8 (\alpha a + 1) (\alpha a + 2) (1 - \operatorname{tgh}^2 \rho) \right\} u_0 = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

und die Bindungsenergien der Grundzustände von $H^3(He^3)$ und He^4 sind beziehungsweise:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{3}{4} \left(\frac{m_1}{\alpha a} \right)^2 \varepsilon_0, & m_1 &= -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{3} (\alpha a + 1) (\alpha a + 2)}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{\alpha a} \right)^2 \varepsilon_0, & m_2 &= -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 8 (\alpha a + 1) (\alpha a + 2)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Es sei nun die Energie $\varepsilon_0 = 2,14$ MV des Deuterons gegeben, und wir bestimmten αa , d. h. die Reichweite des Deuteronpotentials, so daß die Energie von He^4 , $\varepsilon_2 = 27,6$ MV, richtig herauskommt. Es ergibt sich

$$\alpha a = 1,167, \quad \varepsilon_1 = 9,28 \text{ MV.} \quad (37)$$

Die Energie von H^3 ist 8,3 MV, die von He^3 etwa 0,76 MV kleiner, und die berechnete Bindungsenergie ε_1 ist somit 1,36 MV größer als der Mittelwert der beiden.

Es könnte der Unterschied in zweierlei Weise gedeutet werden, erstens durch Annahme einer Bindungsenergie B für das Dineutron, $B - 0,76$ MV für das Diproton und $2B - 0,76$ MV für die beiden Partikeln in He^4 , und zweitens durch die Einführung Heisenbergscher Kräfte für das Deuteron. Die Rechnung zeigt, daß man bei der ersten Annahme

$$B = -2,25 \text{ MV}, \quad \alpha a = 0,964 \quad (38)$$

setzen muß, um die experimentellen Bindungsenergien zu bekommen. Eine derartige große negative Bindungsenergie des Dineutrons paßt in die hier benutzten Vorstellungen von ziemlich fest zusammengehaltenen Neutronen schlecht ein.

Haben dagegen der tiefste Singulettzustand und der tiefste Triplettzustand des Deuterons verschiedene Energie ε_0 und $\varepsilon'_0 = (\beta a / \alpha a)^2 \varepsilon_0$, so wirken je nach der Einstellung des Spins zweier Partikeln die Potentialen

$$\varepsilon_0(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)(1 - \tanh^2 \varrho) \text{ und } \varepsilon_0(\beta a + 1)(\beta a + 2)(1 - \tanh^2 \varrho).$$

Mit $B = 0$ erhält man dann für H^3 und He^4 die Bindungsenergien

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{3}{4} \left(\frac{m_1}{\alpha a} \right)^2 \varepsilon_0, \\ m_1 &= -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9} [\alpha a + 1)(\alpha a + 2) + (\beta a + 1)(\beta a + 2)]}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{m_2}{\alpha a} \right)^2 \varepsilon_0 - 0,76, \\ m_2 &= -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 4[(\alpha a + 1)(\alpha a + 2) + (\beta a + 1)(\beta a + 2)]}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Hier erhält man bei $\alpha a = 1,027$, $\beta a = 0,860$ die richtigen Energiewerte $\varepsilon_1 = 8,3$ MV und $\varepsilon_2 = 27,6$ MV. Die Energie des Singulettzustandes des Deuterons ist dann $\varepsilon'_0 = 1,50$ MV. Die Potentialtiefen des Deuterons sind

$$V_0 = 12,45 \text{ MV}, \quad V'_0 = 10,79 \text{ MV} \quad \text{oder} \quad W \pm H = (11,62 \pm 0,83) \text{ MV}. \quad (40)$$

4. *Verbesserte Theorie der Kerne H^3 , He^3 und He^4 .* Wir haben durch die obigen elementaren Überlegungen einen qualitativen Überblick gewonnen

und beseitigen demnächst die inneren Widersprüche der Theorie durch die Annahme eines endlichen Abstandes der Einzelpartikeln im Diproton und Dineutron. Die einfachste Annahme ist die eines festen Abstandes R , der durch $e^2/R = 0,76$ MV an die Coulombsche Energie des He^3 angepaßt wird. Es ist dann

$$\alpha R = e^2 \alpha / 0,76 = \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{M c^2 \epsilon_0} / 0,76 = \frac{1}{137,3} \sqrt{938,5 \cdot 2,14} / 0,76 = 0,429. \quad (41)$$

Mit $1/\alpha = 4,36 \cdot 10^{-13}$ cm ergibt sich $R = 1,87 \cdot 10^{-13}$ cm, und aus $\alpha R = 0,429$ ersehen wir, daß der Partikelabstand R im Diproton und Dineutron bedeutend kleiner ist als die bis jetzt benutzten Reichweiten des Deuteronpotentials.

Das Diproton und das Dineutron sind nun als starre Rotatoren zu betrachten, und wir haben beim H^3 und He^3 das Deuteronpotential über eine Kugel mit Radius $R/2$ im gegebenen Abstand r vom Aufpunkt zu mitteln. Beim He^4 ist das so gefundene Potential nochmals über eine derartige Kugel zu mitteln. Diese Mittelwerte können elementar berechnet werden, es ergeben sich aber analytisch unbequeme Ausdrücke, und wir ziehen es vor, sie durch einfachere Näherungsausdrücke zu ersetzen, deren Güte sowohl theoretisch als durch numerische Rechnungen beim Vergleich mit den exakten Ausdrücken kontrolliert worden ist.

Das Endergebnis kann kurz so ausgedrückt werden, daß das Glied $(1 - \text{tgh}^2 \varrho)$ im Deuteronpotential bei H^3 (He^3) und He^4 durch die folgenden Ausdrücke beziehungsweise zu ersetzen sind:

$$\left. \begin{aligned} \text{H}^3 (\text{He}^3): & (1 - \text{tgh}^2 \varrho) \left[1 - \text{tgh}^2 \frac{R}{2a} (1 - \text{tgh}^2 \varrho) \right], \\ \text{He}^4: & (1 - \text{tgh}^2 \varrho) \left[1 - \left[1 - \left(1 - \text{tgh}^2 \frac{R}{2a} \right)^2 \right] (1 - \text{tgh}^2 \varrho) \right] \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Dadurch ist das Potential des Dineutrons und des Diprotons aufeinander und auf Protonen und Neutronen auf eine beinahe ebenso einfache Form gebracht wie das Potential des Deuteronen, und sämtliche obigen Kerne können als angenäherte Zweikörperprobleme behandelt werden, die praktisch exakt lösbar sind.

Die Heisenbergschen Kräfte, $\pm H$ im Deuteronpotential, können dadurch berücksichtigt werden, daß man wie in (39) $(\alpha a + 1)(\alpha a + 2)$ durch $\frac{1}{2}(\alpha a + 1)(\alpha a + 2) + \frac{1}{2}(\beta a + 1)(\beta a + 2)$ ersetzt, wobei αa sich auf den Tripletterm, βa auf den Singulettterm bezieht. Die höheren Terme

mit $l \geq 1$ können auch leicht mit hinreichender Genauigkeit berechnet werden, indem $1/\varrho^2$ durch den früher eingeführten Näherungsausdruck

$$\frac{1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho}{\operatorname{tgh}^2 \varrho} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} (1 - \operatorname{tgh}^2 \varrho) \quad (43)$$

ersetzt wird.

Die ganze Theorie setzt voraus, daß die formale Bindungsenergie B des Dineutrons nicht sehr verschieden von Null ist. Weil sie aber noch gänzlich unbekannt ist, müssen wir jedoch auch auf diese Größe Rücksicht nehmen.

Die Wellengleichungen der neuen Zweikörperprobleme werde ich nicht hinschreiben, sondern mich auf die Angabe der resultierenden Energieformeln beschränken. Weil sie sich auf beliebige Werte der Quantenzahlen l und n beziehen, sehen sie ein wenig kompliziert aus, sind aber in der Tat nicht schwer rechnerisch zu benutzen. Zur bequemen Abkürzung setzen wir

$$(\alpha a + 1)(\alpha a + 2) + (\beta a + 1)(\beta a + 2) = \kappa. \quad (44)$$

Man erhält dann die Formeln

$$\varepsilon_{\text{He}^3} = \varepsilon_{\text{H}^3} - \frac{e^2}{R} = \varepsilon_{\text{H}^3} - 0,76 \text{ MV},$$

$$\varepsilon_{\text{H}^3} = \frac{3}{4} \frac{\varepsilon_0}{(\alpha a)^2} \left[m_1^2 - \frac{l(l+1)}{6} \right] + B, \quad m_1 = -\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \\ + \sqrt{-\frac{l(l+1)}{6} + \frac{1}{4} + \frac{4}{3}\kappa \left[1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{R}{2a} \left[\frac{(n+1)(n+1+m_1)}{2n+\frac{5}{2}+l+m_1} - \frac{n(n+m_1)}{2n+\frac{1}{2}+l+m_1} \right] \right]}, \quad (44a)$$

$$\varepsilon_{\text{He}^2} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{(\alpha a)^2} \left[m_2^2 - \frac{l(l+1)}{6} \right] + 2B - \frac{e^2}{R}, \quad m_2 = -\left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \\ + \sqrt{-\frac{l(l+1)}{6} + \frac{1}{4} + 4\kappa \left[1 - \left[1 - \left(1 - \operatorname{tgh}^2 \frac{R}{2a} \right)^2 \right] \left[\frac{(n+1)(n+1+m_2)}{2n+\frac{5}{2}+l+m_2} - \frac{n(n+m_2)}{2n+\frac{1}{2}+l+m_2} \right] \right]}. \quad (44b)$$

Die rechnerischen Ergebnisse fassen wir in der folgenden Tabelle 1 zusammen. Es sind verschiedene Werte der unbekannten Bindungsenergie B des Dineutrons gewählt und die entsprechenden Potentialtiefen des Deuterons, gekennzeichnet durch αa und βa oder $W_0 \pm H_0$ berechnet, die notwendig sind, um die richtige Bindungsenergie sowohl für H^3 (He^3) als für He^4 zu geben. Der entsprechende Energiewert ε'_0 des Singulett-Deuteronzustandes ist hinzugefügt. Wenn man diese Größe auf den anderswo angegebenen Wert 40000 Volt fixieren würde, wäre auch die Größe B bestimmt. Wahrscheinlich kann man aber noch nicht aus Streuversuchen diesen Wert besonders genau angeben. Selbst bei einiger Variation dieser Größe bleibt

aber die Bindungsenergie B des Dineutrons von mäßiger Größe, in Übereinstimmung mit den Voraussetzungen der Theorie, möglicherweise derart,

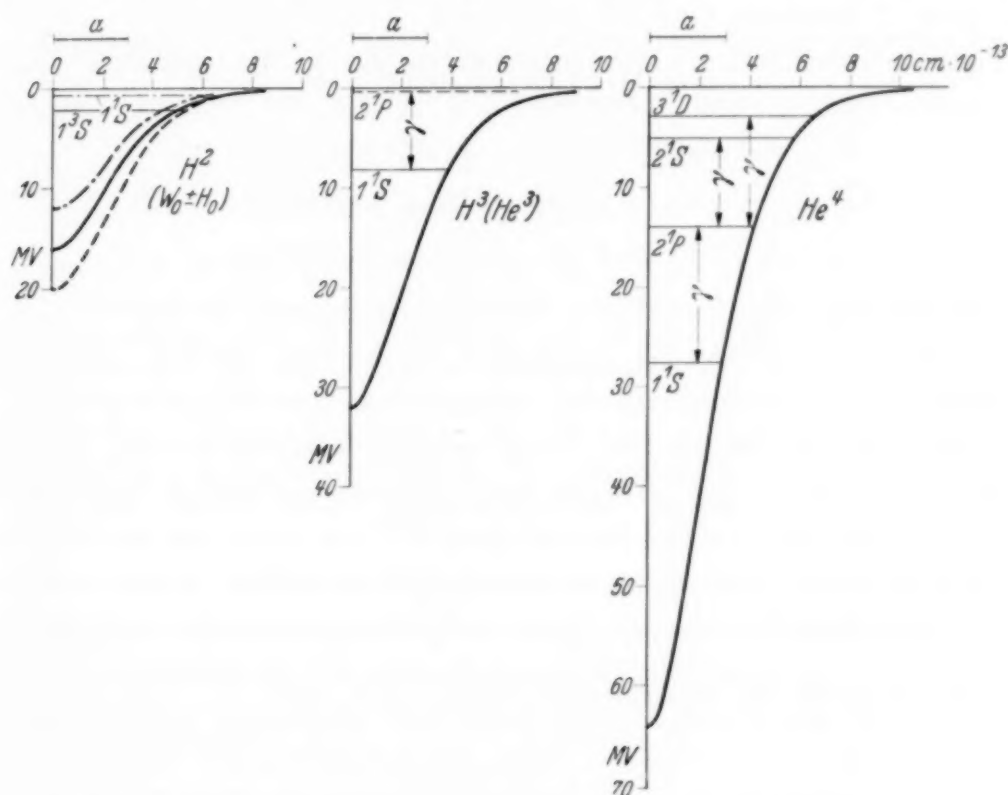


Fig. 1. Triplett- und Singulettpotential und Grundzustände des Deuterons, resultierende Potentiale des Proton-Dineutrons und des Diproton-Dineutrons mit Grundzuständen und angeregten Zuständen.

daß das Dineutron stabil ist, das Diproton nicht. (Stabilität des Diprotons würde die Existenz von He^2 bedeuten.)

Tabelle 1. ($1^3S \text{ H}^2 = \epsilon_0 = 2,14$, $1^2S \text{ H}^3 = 8,3$, $1^1S \text{ He}^4 = 27,6$.)

B	- 2	- 1	0	1	2
αa	0,778	0,741	0,702	0,661	0,617
βa	0,6459	0,4511	0,2514	0,0460	- 0,1685
$W_0 \pm H_0$	$16,43 \pm 1,03$	$16,23 \pm 2,37$	$16,10 \pm 3,87$	$16,07 \pm 5,58$	$16,17 \pm 7,61$
$1^1S \text{ H}^2 = \epsilon'_0$	1,475	0,793	0,274	0,010	- 0,160
2^2P H^3		- 0,28	0,006	0,34	
2^1S He^4		5,25	5,61	5,94	
2^1P He^4		13,83	13,87	13,75	
3^1P He^4		- 1,31	- 0,356	0,82	
3^1D He^4		2,89	3,14	3,25	

Die höheren stabilen Zustände von H^3 und He^4 sind noch hinzugefügt. Sie zeigen wenig Änderung bei der Variation von B oder ϵ'_0 , d. h. sie sind

wesentlich bestimmt durch die Festlegung der Grundzustände von H^3 und He^4 . Bei H^3 kommt nur ein P -Zustand in Frage, bei He^4 ein S -, ein oder zwei P -Zustände und ein D -Zustand.

Die entsprechenden Quantenübergänge mit γ -Dipolstrahlung (durch die starke Ladung des Diprotons), wie in der Fig. 1 angegeben, sind

$$\begin{aligned} 2\ ^1P &\rightarrow 1\ ^1S, & h\nu &\approx 14\ \text{MV}, \\ 3\ ^1D &\rightarrow 2\ ^1P, & h\nu &\approx 10,5\ \text{MV}, \\ 2\ ^1S &\rightarrow 2\ ^1P, & h\nu &\approx 8\ \text{MV}. \end{aligned}$$

In der Tat sind derartige γ -Strahlen beobachtet worden bei Kernprozessen mit resultierenden angeregten He -Kernen, nämlich eine Komponente bei etwa 16 MV und eine oder zwei andere bei etwa 10 MV.

Dies Ergebnis scheint also, was angeregte Zustände betrifft, sehr befriedigend zu sein. Ich wünsche aber darauf ausdrücklich aufmerksam zu machen, das die Existenz des wichtigen $2\ ^1P$ -Zustandes auf die Annahme von gewöhnlichen und Heisenbergschen Kernkräften beruht, und das Kräfte vom Majoranaschen Typus ausgeschlossen werden müssen.

Oslo, Institut für theoretische Physik, Juli 1937.

Optische Untersuchungen der Richtcharakteristik von Ultraschallquellen.

Von E. Hiedemann und K. Osterhammel in Köln.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 10. August 1937.)

Mit optischen Methoden können sowohl die Wellen- wie die Amplitudenfelder von Ultraschallwellen sichtbar gemacht werden. Die Sichtbarmachung der Amplitudenfelder kann auch vor einem großen Hörerkreis vorgeführt werden; sie erlaubt u. a. die Aufnahme der Richtcharakteristik von Ultraschallwellen. Schema der optischen Anordnung zur Sichtbarmachung von Amplitudenfeldern. Die Ultraschallquellen. Die Richtcharakteristik vor angenähert kolbenförmig schwingenden Quarzen für verschiedene Verhältnisse der Höhe der Stirnfläche zur Schallwellenlänge. Einige Spezialfälle.

Seit einigen Jahren hat der erstgenannte Verfasser mit verschiedenen Mitarbeitern (besonders zusammen mit Asbach) Untersuchungen der Schallabstrahlung von Ultraschallquarzen und der Beugung von Ultraschall an einem Spalt ausgeführt. Von diesen sehr umfangreichen Versuchen sind bisher einige Teilergebnisse mitgeteilt worden¹⁾. Das Wellenfeld von Ultraschallquellen konnte mittels der Methode der Sichtbarmachung von Ultraschallwellen in Flüssigkeiten²⁾ sichtbar gemacht und photographiert werden, wodurch Feinheiten der Schallabstrahlung experimentell nachgewiesen werden konnten, die von der Theorie vorausgesagt waren³⁾. Seit dem vorigen Jahre wurde von Bär⁴⁾ und unabhängig und fast gleichzeitig von Hiedemann und Hoesch⁵⁾ sowie von Parthasarathy⁶⁾ die Methodik der Sichtbarmachung von Ultraschallstrahlen entdeckt und weiterentwickelt. Diese neue Methode erlaubt die Sichtbarmachung des Schallamplitudenfeldes vor Ultraschallquellen. *Die Lichtstärke dieser Anordnung ist so groß, daß man ohne Schwierigkeit die Richtcharakteristik eines geeigneten Ultraschallquarzes einem großen Hörerkreis sichtbar machen kann*⁷⁾. Daß eine sehr genaue optische Untersuchung der Richtcharakteristik von Ultraschallquarzen jetzt möglich geworden ist, wird im folgenden gezeigt werden.

¹⁾ E. Hiedemann, *Ergebn. d. exakt. Naturwiss.* **14**, 201, 1935; *ZS. d. V. D. I.* **80**, 581, 1936. — ²⁾ E. Hiedemann m. versch. Mitarb. in *ZS. f. Phys.* seit 1934. — ³⁾ E. Grossmann u. E. Hiedemann, *ZS. f. Phys.* **95**, 383, 1935. — ⁴⁾ R. Bär, *Helv. Phys. Acta* **9**, 617, 1936. — ⁵⁾ E. Hiedemann u. K. H. Hoesch, *ZS. f. Phys.* **104**, 197, 1937. — ⁶⁾ S. Parthasarathy, *Proc. Indian Acad. (A)* **4**, 555, 1936. — ⁷⁾ Erstmalig vorgeführt von E. Hiedemann u. K. H. Hoesch bei der Tagung des Gauess Rheinland-Westfalen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 20. Februar 1937 in Köln.

Die optische Anordnung. Die Fig. 1 zeigt das Schema der optischen Anordnung zur Sichtbarmachung von Schallstrahlen. Die Lichtquelle L wird durch einen Kondensor K auf einen Spalt konzentriert, der im Brennpunkt des Objektivs O_1 steht, so daß aus diesem paralleles Licht in die Küvette eintritt, in welcher ein Piezoquarz Ultraschallwellen senkrecht zur Lichtrichtung aussendet. Mittels des Objektivs O_2 wird ein Spaltbild an einer Stelle entworfen, an der ein horizontal verschiebbarer Spalt angebracht ist. Da die Schallwellen als optisches Gitter wirken¹⁾, so wird das

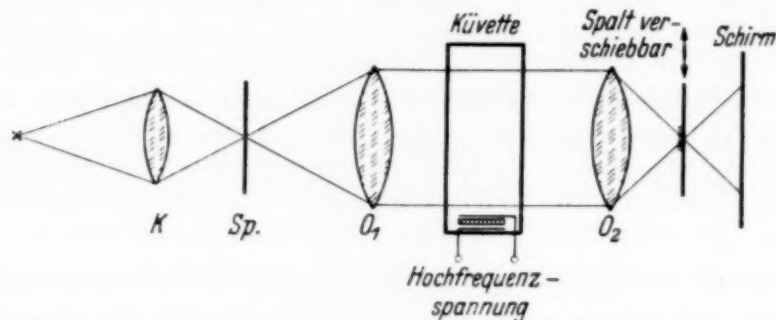


Fig. 1. Schema der optischen Anordnung zur Sichtbarmachung von Ultraschallstrahlen.

Spaltbild in mehrere Beugungsordnungen aufgespalten. Blendet man mittels des verschiebbaren Spaltes alle Beugungsordnungen bis auf eine einzige ab, so erhält man auf dem Schirm eine Abbildung der Inhomogenitäten des Ultraschallwellengitters, die größer sind als die Gitterkonstante²⁾. Diese für Vorführungen besonders handliche Anordnung wird für feinere Untersuchungen und Demonstrationen dahin abgeändert, daß statt des ersten Spaltes eine Lochblende verwendet wird; am Ort der Beugungsspektren der Lochblende wird die gewünschte Beugungsordnung dann durch eine ringförmige Öffnung in einem Schirm hindurchgelassen. (Wegen der Notwendigkeit der Verwendung von Loch- und Ringblende statt zweier Spalte sei auf analoge Überlegungen und Versuche von Winkelmann³⁾ hingewiesen.)

Die Ultraschallquellen. Ein durch ein Ultraschallfeld fortschreitender Lichtstrahl wird an allen Stellen seines Weges durch das Schallfeld von diesem beeinflußt. Die Einwirkung des Schallfeldes auf den Lichtstrahl

¹⁾ P. Debye und F. W. Sears, Proc. Nat. Acad. Amer. **18**, 410, 1932; R. Lucas und P. Biquard, Journ. de Phys. et le Radium **3**, 464, 1932. —

²⁾ Man kann auch mehrere Beugungsordnungen verwenden; z. B. nur die nullte Ordnung abblenden u. ä. m. Wegen dieser und ähnlicher Möglichkeiten sei auf die zitierten Arbeiten von R. Bär sowie von E. Hiedemann und K. H. Hoesch verwiesen. — ³⁾ A. Winkelmann, Ann. d. Phys. **19**, 416, 1906.

ist von der Intensität und der Richtung der Schallwellen abhängig. Aus den optischen Erscheinungen kann daher nur auf das Schallfeld geschlossen werden, wenn ebene Schnitte durch das Schallfeld senkrecht zur Lichtrichtung einander gleich sind. Experimentell läßt sich diese Bedingung mit großer Annäherung verwirklichen, wenn man Ultraschallquellen, z. B. Spalte, verwendet, die parallel der Lichtrichtung sind und deren Länge sehr groß gegenüber ihrer Breite ist. Bei Spalten treten experimentelle Schwierigkeiten dadurch auf, daß es schwierig ist, die Mitschwingung der Spaltbacken zu verhindern. Bei Verwendung von dicken, nichtschwingenden Spaltbacken müssen diese keilförmig sein, da sie sonst einen Kanal bilden und die Schallwellenfronten durch Wandeffekte deformiert werden. Bei keilförmigen Spaltbacken wird aber das Wellenfeld vor dem Spalt durch Reflexionen und Interferenzen so stark deformiert, daß auch das Wellenfeld hinter dem Spalt davon beeinflusst wird. Es ist daher notwendig, auch andere Ultraschallquellen zu verwenden, die so abstrahlen, daß sie dem Idealfall eines Spaltes in einer vollkommen starren Trennwand, auf den eine ebene Schallwelle auftrifft, möglichst nahe entsprechen. Diese Bedingung würde z. B. ein Piezoquarz angenähert erfüllen, dessen Länge gleich der Spaltlänge ist und der senkrecht zum Lichtweg möglichst kolbenförmig schwingt. Quarzstäbe, die nach den Angaben des erstgenannten Verfassers vor einigen Jahren geschnitten und bereits in den Untersuchungen mit Asbach benutzt wurden, entsprechen den obigen Anforderungen weitgehend. Dieser Quarzschnitt weicht von den sonst üblichen in einer die Zwecke dieser Untersuchungen kennzeichnenden Weise ab. In Fig. 2 ist der Schnitt angedeutet: Um möglichst kolbenförmige Schwingung der Stirnflächen zu erhalten, wurden entsprechend den Untersuchungen von Straubel¹⁾ sogenannte 71°-Stäbe gewählt; jedoch wurden diese Stäbe so geschnitten, daß ihre größte Länge senkrecht zur 71° 32'-Richtung (mit der z -Achse in der $y-z$ -Ebene) ist, während sonst bei den 71°-Stäben die größte Länge mit dieser Richtung übereinstimmt. Die größte Länge des Stabes sei mit a bezeichnet, die Dicke in der x -Richtung (der elektrischen Achse) mit d und die andere Kantenlänge mit b . Die z -Achse der Zeichnung ist gemäß der üblichen

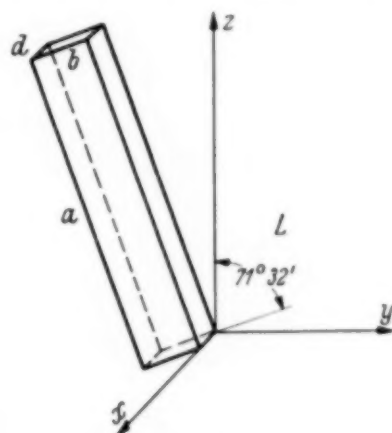


Fig. 2. Schnitt der verwendeten Quarzstäbe.

¹⁾ H. Straubel, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. **38**, 19, 1931.

Bezeichnungsweise die optische Achse des Quarzes und die Y-Achse ist die zu ihr und der elektrischen Achse senkrechte Achse. Die Elektroden werden auf den Flächen senkrecht zur x -Achse, also auf die $a-b$ -Flächen,



Fig. 3a. Wellenfeld um einen Quarz der Dicke $d = 4\lambda$.

angebracht und die Abstrahlung des Quarzes von einer (oder beiden) $a-d$ -Stirnfläche wird beobachtet. Wenn Wert darauf gelegt wurde, die Schallabstrahlung des ganzen Quarzes zu erhalten, so wurde der Quarz auf eine feste Elektrode aufgekittet, die dann als Halter diente, wie man in Fig. 3 erkennen kann. Will man durch die Schallabstrahlung in der x -Richtung nicht gestört werden, so kann man den Quarz zwischen dicke Elektroden (vgl. etwa Fig. 6) festklemmen.

Die Richtcharakteristik einiger Ultraschallquellen. Die Fig. 3a gibt das Wellenfeld eines Quarzes, dessen Dicke $d = 4\lambda$ (λ = Schallwellenlänge) betrug und der in Benzol mit der Frequenz von 5320 kHz

erregt wurde. Die Fig. 3b gibt das Schallamplitudenfeld wieder, das mit der Methode der Sichtbarmachung der Schallstrahlen erhalten wurde, wobei die

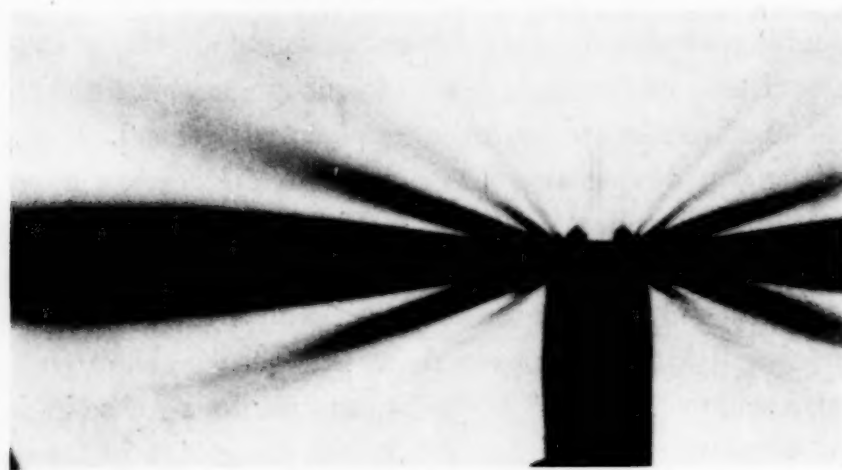


Fig. 3b. Amplitudenfeld um den gleichen Quarz.

einfache Anordnung mit zwei Spalten verwendet worden war. Zur Abbildung wurden alle Beugungsordnungen bis auf die nullte abgeblendet. Die Kurven gleicher Druckamplitude lassen sehr deutlich die Richtcharakteristik mit

den Haupt- und Nebenmaxima erkennen. Die Fig. 3c zeigt das Schallfeld hinter einer Spaltblende¹⁾, deren Breite $d = 4,2 \lambda$ betrug. Die Aufnahme wurde bei 5450 kHz in Xylol ausgeführt. Zur Abbildung des Amplitudenfeldes wurde dabei nicht die einfache Anordnung mit zwei Spalten, sondern diejenige mit Loch- und Ringblenden benutzt, wie auch in allen folgenden Aufnahmen. Die Fig. 4a zeigt das Wellenfeld vor einem Spalt der Breite $d = 0,8 \lambda$. Frequenz: 5300 kHz; Flüssigkeit: Xylol. Die Fig. 4b zeigt die

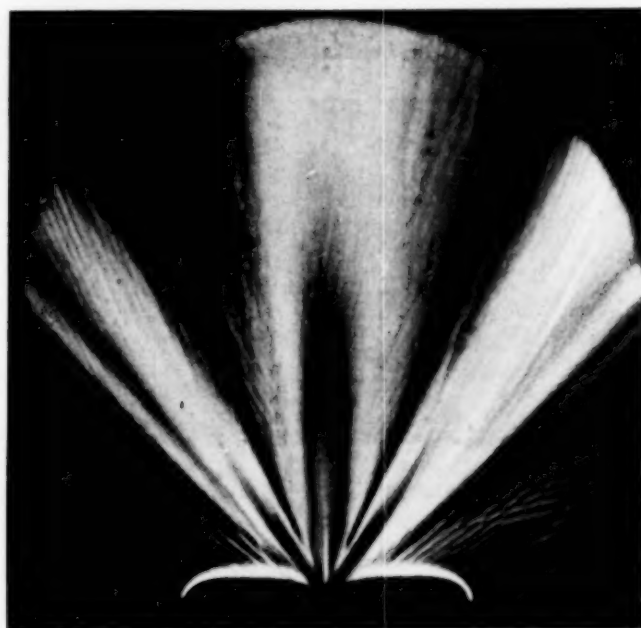


Fig. 3 c. Amplitudenfeld vor einer Spaltblende der Breite $4,2 \lambda$.

Abbildung des zugehörigen Amplitudenfeldes unter den gleichen Bedingungen. Zur Abbildung diente für diese und alle folgenden Aufnahmen die erste Beugungsordnung.

Die Fig. 5a zeigt die von Stenzel berechnete Richtcharakteristik für eine quadratische Kolbenmembran der Seitenlänge $d = 1,5 \lambda$ und Fig. 5b die Aufnahme des Amplitudenfeldes vor einem sehr langen Piezoquarzstab der Dicke $d = 1,3 \lambda$. Frequenz: 3050 kHz; Flüssigkeit: Xylol. Die Fig. 6a zeigt eine von Stenzel berechnete Richtcharakteristik für eine quadratische Kolbenmembran der Seitenlänge $d = 3 \lambda$ und Fig. 6b die Aufnahme des Amplitudenfeldes vor einem langen Quarzstab der Dicke $d = 3,5 \lambda$. Frequenz: 3100 kHz; Flüssigkeit: Xylol. Die Fig. 7 gibt das Amplitudenfeld vor einem langen Quarzstab der Dicke $d = 7,5 \lambda$. Frequenz: 5350 kHz;

¹⁾ Eine interessante Aufnahme des Amplitudenfeldes vor einem Spalt hat übrigens neuerdings schon R. Bär, *Helv. Phys. Acta* **10**, 311, 1937 veröffentlicht.

Flüssigkeit: Xylol. In den bisherigen Aufnahmen erkennt man die gute Übereinstimmung mit den theoretisch berechneten Richtcharakteristiken für Kolbenmembranen, die natürlich nur qualitativ sein kann, weil die Stirn-

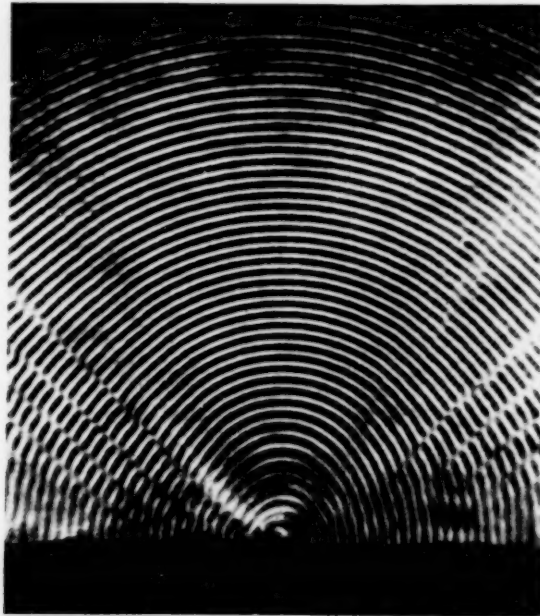


Fig. 4 a. Wellenfeld vor einer Spaltblende der Breite $0,8 \lambda$.

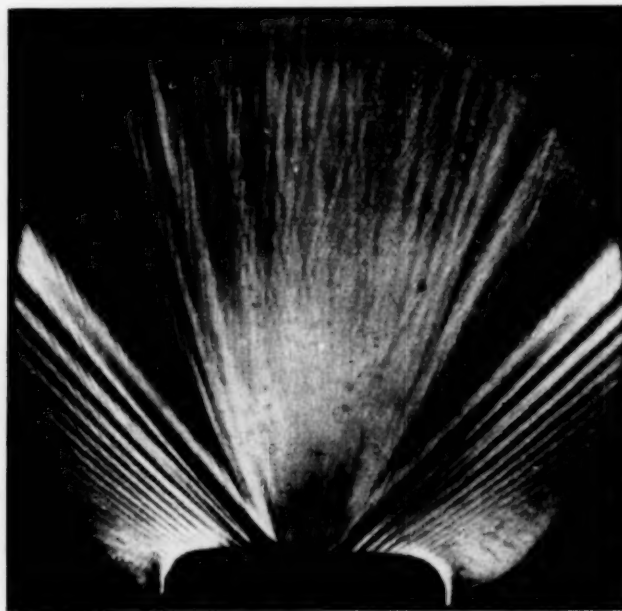


Fig. 4 b. Amplitudenfeld vor der gleichen Spaltblende.

fläche der benutzten Quarze ein schmales, sehr langes Rechteck ist, die theoretisch berechneten Richtcharakteristiken aber für quadratische Stirnflächen gelten. Man darf in dieser Übereinstimmung ein Anzeichen dafür

sehen, daß auch diese andersartigen „71°-Stäbe“ ebenso gut kolbenförmig schwingen, wie die sonst üblichen. In den nächsten Aufnahmen sind dagegen

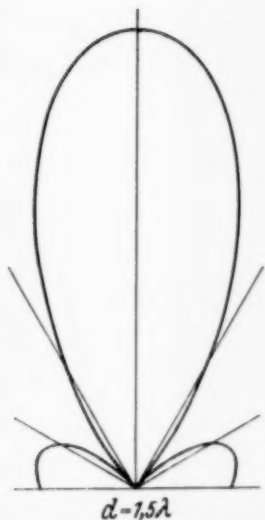


Fig. 5a. Richtcharakteristik einer quadratischen Kolbenmembran der Kantenlänge $d = 1,5 \lambda$ (berechnet von H. Stenzel).

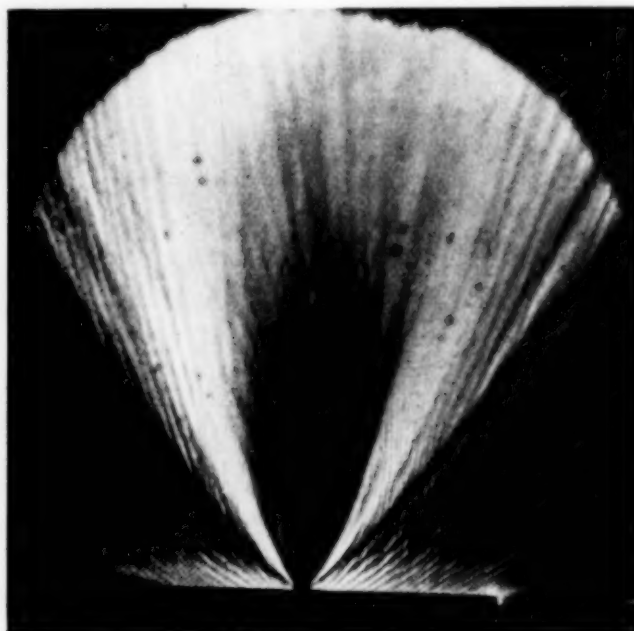


Fig. 5b. Amplitudenfeld vor einem Quarz der Dicke $d = 1,3 \lambda$.

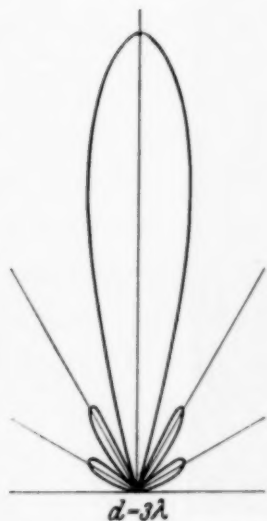


Fig. 6a. Richtcharakteristik einer quadratischen Kolbenmembran der Kantenlänge $d = 3 \lambda$ (berechnet von H. Stenzel).

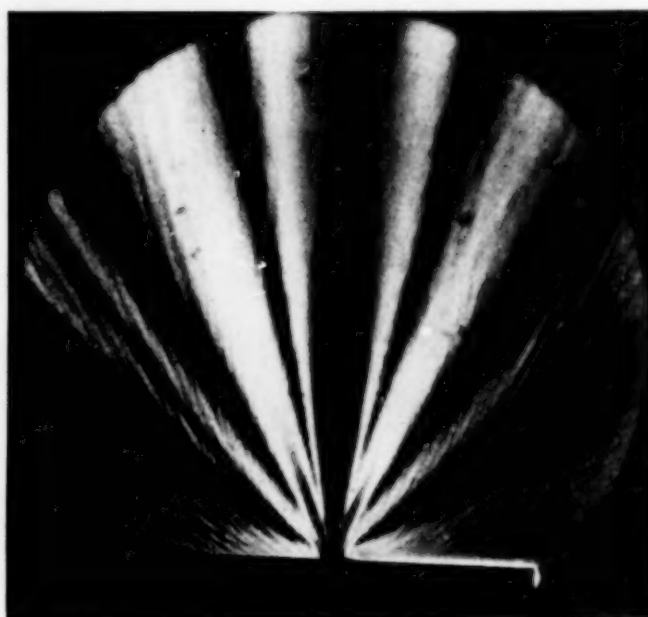


Fig. 6b. Amplitudenfeld vor einem Quarz der Dicke $d = 3,5 \lambda$.

Beispiele für bestimmt nicht kolbenförmige Schwinger gegeben. Diese wurden durch Anlegung der Elektroden an die a — d -Flächen und Beob-

achtung der Abstrahlung der a — b -Flächen erhalten. Die Fig. 8 zeigt eine Aufnahme des Amplitudenfeldes für diese Abstrahlung bei 5400 kHz in

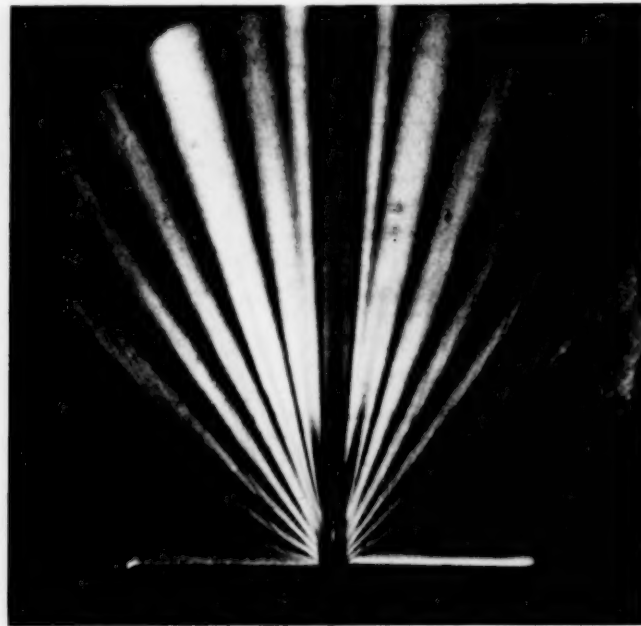


Fig. 7. Amplitudenfeld vor einem Quarz der Dicke $7,5 \lambda$.

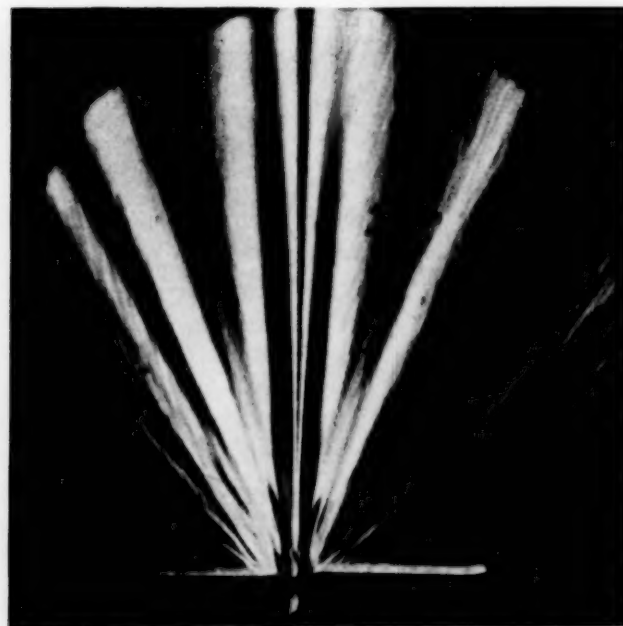


Fig. 8. Amplitudenfeld vor einem nicht kolbenförmig schwingenden Quarz der Dicke $d' = 10 \lambda$.

Xylol, die Dicke d' der abstrahlenden Fläche betrug dabei $d' = 10 \lambda$. Auf der Aufnahme ist ein scharfes Minimum in der Mitte und zwei Hauptmaxima symmetrisch zur Mitte zu erkennen. Diese Aufnahme erinnert an die

Richtcharakteristik gewisser eingespannter Membranen. Erhöht man für den gleichen Quarzstab die Frequenz, so wird das Verhältnis d'/λ größer; die Fig. 9 zeigt z. B. das Amplitudenfeld vor dem gleichen Quarz für 5500 kHz, wobei $d = 10,4 \lambda$ ist. In der Mitte des Amplitudenfeldes erkennt man

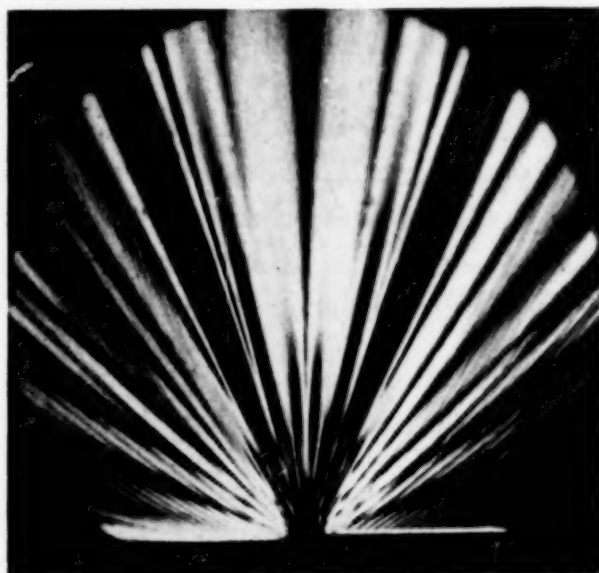


Fig. 9. Amplitudenfeld vor dem gleichen Quarz bei etwas höherer Frequenz, so daß $d = 10,4 \lambda$.

wiederum ein Minimum; die Hauptmaxima aber sind jetzt nicht mehr unmittelbar neben dem Minimum, sondern symmetrisch zu diesem in die dritten Maxima gewandert.

Die hier gegebene Auswahl der experimentellen Ergebnisse unserer optischen Untersuchungen der Schallfelder vor Schwingquarzen und Spalten soll nur zeigen, daß die optische Methode eine sehr genaue Untersuchung des Schallfeldes sowohl im Hinblick auf das Wellenfeld, wie auf das Amplitudenfeld gestattet. Die theoretische Auswertung dieser und anderer Aufnahmen ist noch keineswegs abgeschlossen; sie wird natürlich im Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von Backhaus¹⁾, Backhaus und Trendelenburg²⁾, Stenzel³⁾ und Strutt⁴⁾ erfolgen. Dies dürfte noch längere Zeit in Anspruch nehmen, da das bereits vorliegende experimentelle Material noch erheblich vermehrt werden soll, um eine Aufstellung empirischer Formeln zu ermöglichen. Bei einem 71°-Stab ist z. B. die Amplitudenverteilung über den größten Teil der Stirnfläche nach den Untersuchungen

¹⁾ H. Backhaus, Ann. d. Phys. **5**, 1, 1930. — ²⁾ H. Backhaus u. F. Trendelenburg, ZS. f. techn. Phys. **7**, 630, 1926. — ³⁾ H. Stenzel, E. N. T. **4**, 240, 1927; **12**, 16, 1935. — ⁴⁾ M. J. O. Strutt, ZS. f. Phys. **69**, 597, 1931.

von Bücks und Müller¹⁾ konstant, dagegen nicht an den Rändern. Es muß nun experimentell entschieden werden, ob bei dem Vergleich der theoretischen Formeln für die Richtcharakteristiken mit den experimentell ermittelten die Dicke d der Strahlungsfläche nicht durch eine kleinere „wirksame“ Dicke d^* ersetzt werden muß, und ob eine einfache Beziehung zwischen d und d^* aufgestellt werden kann. Ähnliche Probleme liegen auch bei den Schallbeugungserscheinungen an Spalten vor. Ferner bestehen auch noch zum Teil Schwierigkeiten der numerischen Auswertung der theoretischen Formeln (vgl. etwa E. Grossmann u. E. Hiedemann, l. c.). Da der endgültige Abschluß unserer Untersuchungen noch nicht zu übersehen ist, erschien es uns angebracht, die obigen experimentellen Ergebnisse in Anbetracht ihrer Wichtigkeit schon jetzt in aller Kürze mitzuteilen.

Herrn Prof. Dr. H. Falkenhagen sind wir für die Überlassung von Apparaten zu Dank verpflichtet, desgleichen der Helmholtz-Gesellschaft.

Köln, Abteilung für Elektrolyt-Forschung an der Universität, im Juli 1937.

¹⁾ K. Bücks u. H. Müller, ZS. f. Phys. **84**, 75, 1933.

Berichtigung

zu der Arbeit: Die Bahnen des Elektrons im Magnetron unter Berücksichtigung der Raumladungen.¹⁾

Von K. Kugelman.

(Eingegangen am 21. August 1937.)

Abschnitt 2 der Arbeit, der als Grundlage der Rechnung das Larmor-Theorem in der Fassung von Becker²⁾ darstellt, schließt:

„Die Wirkung des Magnetfeldes besteht also anschaulich nur darin, daß das ganze Elektronensystem, ohne daß seine innere Bewegung verändert wird, in eine Rotation mit der Kreisfrequenz ω_L um die Feldrichtung versetzt wird.“

Daraus würde folgen, daß die Elektronen in jedem Magnetfeld die Anode erreichen, im Widerspruch zu der Erfahrung, daß ein genügend hohes Magnetfeld alle Elektronen von der Anode fernhält.

Becker hat als Voraussetzung für die Anwendung des Larmor-Theorems angegeben, daß die dem Elektron durch die Präzessionsbewegung allein erteilte Geschwindigkeit klein sei gegen die Geschwindigkeit, die das Elektron ohne Präzessionsbewegung in seiner Bahn besitzen würde. Diese Voraussetzung trifft beim Zeeman-Effekt, für dessen Theorie Becker das Larmor-Theorem entwickelt, zu, nicht aber für das Magnetron. Die Resultate der Arbeit geben daher nicht die Elektronenbahnen im Magnetron.

Trotzdem kann, wie schon Braunbeck³⁾ zeigte, das Larmor-Prinzip für die Theorie der Elektronenbewegung im Magnetron nutzbar gemacht werden. Die Bewegungsgleichung der Elektronen in elm. CGS-Einheiten

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathcal{E} + e[\mathbf{v}\mathcal{H}] \quad (1)$$

bezieht man auf ein neues Koordinatensystem in quergestrichenen Größen, das gegen das bisherige feste mit einer Winkelgeschwindigkeit $\mathbf{\omega}$ rotiert. Dann gilt für die Elektronenbewegung in dem neuen System

$$m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - 2m[\mathbf{\omega}\bar{\mathbf{v}}] - m[\mathbf{\omega}[\mathbf{\omega}\mathbf{r}]]. \quad (2)$$

Die Elektronenbahnen mit Magnetfeld ergeben sich in dem rotierenden System als Bahnen ohne Magnetfeldeinwirkung, wenn der Einfluß der

¹⁾ ZS. f. Phys. **97**, 202—210, 1935; **98**, 534—535, 1936. — ²⁾ R. Becker, Theorie der Elektrizität. II. S. 92, 93. Leipzig 1933. — ³⁾ W. Braunbeck, ZS. f. Phys. **17**, 117, 1923.

Zentrifugalkraft vernachlässigt werden darf und die Corioliskraft gerade den Anteil $e[\mathbf{v}\mathfrak{H}]$ in $m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ aufhebt. Das tritt ein, wenn $[\mathbf{w}\mathbf{r}]$ klein gegen \mathbf{v} ist und

$$\mathbf{w} = -\frac{e}{2m} \mathfrak{H}. \quad (3)$$

\mathbf{w} ist die Larmor-Frequenz.

Im Magnetron darf $[\mathbf{w}\mathbf{r}]$ nicht mehr gegen \mathbf{v} vernachlässigt werden. Rotiert das quergestrichene System mit der Larmor-Frequenz, so folgt für die Elektronenbewegung wegen $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + [\mathbf{w}\mathbf{r}]$

$$\begin{aligned} m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} &= e \mathfrak{E} + e [\mathbf{w}\mathbf{r}] \mathfrak{H} - m [\mathbf{w}[\mathbf{w}\mathbf{r}]] \\ &= e \mathfrak{E} - e \{ \mathbf{w}(\mathfrak{H}\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathfrak{H}\mathbf{w}) \} - m \{ \mathbf{w}(\mathbf{w}\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{w}\mathbf{w}) \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Verwendet man nun, wie üblich, zwei Zylinderkoordinatensysteme r, φ, z bzw. $\bar{r}, \bar{\varphi}, \bar{z}$ mit $r = \bar{r}$, $z = \bar{z}$, $\dot{\varphi} = \dot{\bar{\varphi}} + \omega$, \mathfrak{H} homogen, in Richtung der z -Achse, vom Betrag H und $\omega = -\frac{e}{2m} H$, so erhält man die Bewegungsgleichung der Elektronen in der Form:

$$m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = e \cdot \mathfrak{E} + er \left(-H^2 \frac{e}{2m} \right) + mr \left(\frac{e^2}{4m^2} H^2 \right), \quad (5)$$

$$m \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = e \left(\mathfrak{E} - \frac{1}{4} \frac{e}{m} r H^2 \right). \quad (6)$$

Die Magnetfeldwirkung besteht also anschaulich nicht nur in einer Rotation des ganzen Elektronensystems, sondern außerdem in einer Verminderung der r -Komponente der elektrischen Feldstärke um $\frac{1}{4} \frac{e}{m} r H^2$.

Aus Gleichung (6) lassen sich je nach den über die Anfangsgeschwindigkeit der Elektronen gemachten Vernachlässigungen die Formeln von Greinacher, Hull, Braunbeck für die Berechnung von e/m aus Messungen am Magnetron herleiten.